

Zastosowanie funkcji logarytmicznej w zadaniach praktycznych

(źródło: zasoby internetu; opracowanie i wybór zadań: Ewa Ludwikowska)

Funkcja logarytmiczna często jest wykorzystywana jako model obserwacji, doświadczeń oraz opisu zjawisk naukowych i rozwiązywania problemów z życia wziętych. Przykładem jest zastosowanie logarytmu w modelu ludzkiej pamięci, w określeniu związku pomiędzy liczbą decybeli a głośnością dźwięków, sejsmologii, określaniu odczynu roztworów, wyznaczaniu zmian ciśnienia atmosferycznego.

Przykład 1. Model ludzkiej pamięci

Studenci biorący udział w serii wykładów w ramach eksperymentu psychologicznego mieli cyklicznie w odstępach miesięcznych pisać egzamin sprawdzający trwałość ich wiedzy. Celem badania było pokazanie, ile studenci zapamiętali z danej części materiału. Średnie wyniki były za każdym razem wnikliwie analizowane, a zauważona prawidłowość została zapisana w postaci wzoru na liczbę punktów, jako *model pamięci ludzkiej*:

$f(t) = 75 - 6\ln(t+1)$, $0 \leq t \leq 12$, gdzie t oznacza czas w miesiącach.

- Jaka jest liczba punktów na egzaminie, gdy $t=0$?
- Jaka jest liczba punktów po upływie $t=2$ miesięcy?
- Jaka jest liczba punktów po upływie $t=6$ miesięcy?

Rozwiązanie:

a. egzamin, $t=0$

$$f(0) = 75 - 6\ln(0+1)$$

$$f(0) = 75 - 6\ln 1$$

$$f(0) = 75 - 6 \cdot 0$$

$$f(0) = 75$$

b. po upływie $t=2$ miesięcy

$$f(0) = 75 - 6\ln(2+1)$$

$$f(0) = 75 - 6\ln 3$$

$$f(0) \approx 75 - 6 \cdot 1,0986$$

$$f(0) \approx 68,4$$

c. po upływie $t=6$ miesięcy

$$f(0) = 75 - 6 \ln(6 + 1)$$

$$f(0) = 75 - 6 \ln 7$$

$$f(0) \approx 75 - 6 \cdot 1.9459$$

$$f(0) \approx 63,3$$

Problem:

Użyj modelu graficznego, aby ustalić czas w miesiącach, jaki minie, by przeciętny wynik studenta w przykładzie 1 wynosił 60. Wyjaśnij metodę jakiej użyłeś do rozwiązania problemu. Opisz inną metodę jakiej można użyć wykorzystując model graficzny, aby rozwiązać to zagadnienie.

Sejsmolodzy używają skali Richtera do mierzenia siły wstrząsów ziemi. Równanie $R = \log \frac{A}{a}$ porównuje amplitudę A fali uderzeniowej wstrząsów do amplitudy a fali uderzeniowej o minimalnym natężeniu, traktowanej jako odniesienie.

Przykład 2. Skala Richtera

Amplituda drgań sejsmicznych podczas trzęsienia ziemi na Alasce w 1964 roku była $10^{8,4}$ razy większa od minimalnej amplitudy (odniesienia). Oblicz siłę trzęsienia ziemi w skali Richtera.

Rozwiązanie:

$$R = \log \frac{A}{a}$$

$$R = \log \frac{10^{8,4} a}{a}$$

$$R = \log 10^{8,4}$$

$$R = 8,4$$

Odp. Trzęsienie ziemi na Alasce miało moc 8,4 w skali Richtera.

Uwaga. (źródło: wikipedia.pl)

Obecnie skalę Richtera zastępuje magnituda M . Jest to wielkość charakteryzująca skalę trzęsienia ziemi, pierwotnie zdefiniowana jako logarytm dziesiętny z amplitudy drgań sejsmicznych (wyrażonej w mikronach) mierzonej standardowym sejsmografem 100 km od epicentrum. Obecnie magnituda wyrażana jest wzorem $M = \log(A/T)_{\max} + 1,66\log D + 3,3$, gdzie D - odległość od epicentrum podana w km.

Problem:

Jaka była magnituda trzęsienia ziemi na Alasce w 1964 roku? Skorzystaj z kalkulatora.

Chemicy stosują skalę pH do oznaczenia odczynu roztworów. Czysta woda ma pH równe 7, roztwory kwaśne mają pH mniejsze od 7, a roztwory zasadowe mają pH wyższe od 7. Wartość pH wyznacza się w oparciu o stężenie jonów wodorowych w roztworze. Wzór na pH ma postać $pH = -\log H^+$, gdzie H^+ to wartość stężenia jonów wodorowych w molach na litr roztworu.

Przykład 3. Odczyn roztworów

Wyznacz pH roztworu, jeżeli $H^+ = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol/l}$

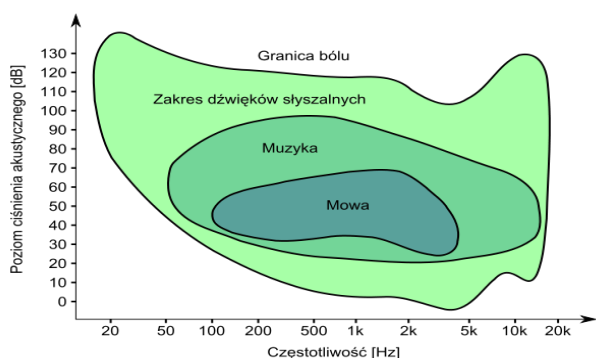
Rozwiązanie:

$$pH = -\log H^+$$

$$pH = -\log(6,3 \cdot 10^{-5})$$

Odp. pH = 4,2

Podobną skalą do skali Richtera są decybele, za pomocą których określa się poziom natężenia dźwięku. Wzór $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$ określa liczbę decybeli, gdzie I jest natężeniem szukanego poziomu dźwięku, a I_0 to tzw. próg słyszalności o wartości 10^{-12} W/m^2 .



Ryc.1. Poziom ciśnienia akustycznego. (źródło: wikipedia.pl)

Przykład 4. Poziom hałasu

Oblicz głośność (w dB) krzyku niemowlęcia, dla którego natężenie $I = 10^{-4} \text{ W/m}^2$

Rozwiązanie:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$D = 10 \log \frac{10^{-4}}{10^{-12}}$$

$$D = 10 \log 10^8$$

$$D = 80 \text{ dB}$$

Odp.: Głośność jest równa 80 dB.

Wysokość góry w metrach oblicza się ze wzoru $h = 18400 \cdot (\log b_1 - \log b_2)$, gdzie b_1 , b_2 oznaczają ciśnienia barometryczne (w mm słupka rtęci) u podnóża góry i na jej wierzchołku. Po przekształceniach wzoru można wykorzystać go do obliczenia zmiany ciśnienia atmosferycznego.

Przykład 5. Zmiany ciśnienia atmosferycznego

Jakie jest ciśnienie barometryczne b_1 u podnóża góry, jeżeli jej wysokość wynosi 680,8 m, a ciśnienie $b_2 = 680 \text{ mm Hg}$.



Ryc.2. Karkonosze (źródło zdjęcia:harctur.pl)

Rozwiązanie:

$$h = 18400 \cdot (\log b_1 - \log b_2)$$

$$\frac{h}{18400} = \log b_1 - \log b_2$$

$$\log b_1 = \log b_2 + \frac{h}{18400}$$

$$\log b_1 = \log 680 + \frac{680,8}{18400}$$

$$\log b_1 \approx 2,8325 + \frac{680,8}{18400}$$

$$\log b_1 \approx 2,8692$$

$$b_1 \approx 740 \text{ mm Hg}$$

Odp.: Ciśnienie u podnóża góry jest równe 740 mm Hg.

Oto inne przykłady zastosowania funkcji logarytmicznej.

Przykład 6.

Ile procent światła przenika do lasu na głębokość $l = 10$ m, jeżeli na każdym metrze kwadratowym rośnie jedno drzewo, a średnica pni drzew na wysokości 1,50 m wynosi $D = 0,10$ m? Zastosuj wzór $\log \frac{I}{I_0} = -0,43NDl$, gdzie I jest natężeniem światła na głębokości l ,

I_0 natężeniem światła padającego na brzeg lasu, a N - liczbą drzew na 1 m^2 .

Rozwiązanie:

$$\log \frac{I}{I_0} = -0,43 \cdot 1 \cdot 0,10 \cdot 10$$

$$\log \frac{I}{I_0} = -0,43$$

$$\frac{I}{I_0} = 0,37 = 37\%$$

Odp. Przenika 37% światła.

Zadania.

1. Uczniowie w klasie o profilu matematycznym napisali sprawdzian z dużego zakresu materiału. Ten sam sprawdzian pisali ponownie w odstępach miesięcznych, w celu zbadania trwałości wiedzy. Średnie wyniki były za każdym razem wnikliwie analizowane, a zauważona prawidłowość została zapisana w postaci wzoru na liczbę punktów:

$$f(t) = 80 - 17 \log(t + 1), \quad 0 \leq t \leq 12, \quad \text{gdzie } t \text{ oznacza czas w miesiącach.}$$

- a) Jaka była przeciętna liczba zdobytych punktów na pierwszym terminie sprawdzianu?
- b) Jaka była przeciętna liczba zdobytych punktów po 4 miesiącach?
- c) Jaka była przeciętna liczba zdobytych punktów po 10 miesiącach?

2. Amplituda trzęsienia Ziemi u wybrzeży Honsiu w Japonii w 2011 roku była 10^9 razy większa od amplitudy minimalnej. Oblicz siłę wstrząsów w skali Richtera.

3. Oblicz ile razy silniejsze było trzęsienie Ziemi w Japonii od tego, które miało miejsce w San Francisco w 1906 roku, a które posiadało $10^{8,3}$ razy większą amplitudę od amplitudy minimalnej.



Ryc.3. Skutki trzęsienia Ziemi w Japonii w 2011 r.

Autor fot. @mitsu_1-24; źródło. www.globalvoicesonline.org

4. Oblicz stężenie jonów wodorowych w roztworze wody z mydłem wiedząc, że jego $\text{pH} = 9$.

5. Ile razy większe stężenie jonów wodorowych znajduje się w roztworze soku z cytryny o $\text{pH} = 2,5$ niż w roztworze proszku do prania o $\text{pH} = 11$?

6. Zastosuj wzór $\text{pH} = -\log H^+$ i oblicz:

- pH roztworu kawy o stężeniu H^+ równym $3,98 \cdot 10^{-7} \text{ mol/l}$
- pH roztworu soli o stężeniu H^+ równym $2,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol/l}$
- stężenie jonów wodorowych (w mol/l) w roztworze sody kaustycznej o $\text{pH} = 13,5$

7. Oblicz liczbę decybeli jaką generują głośniki samochodowe podczas odtwarzania utworu heavy metalowego, wiedząc że natężenie dźwięku wynosi 10^{-10} W/cm^2

8. Oblicz liczbę decybeli szeptu, którego natężenie jest równe $3 \cdot 10^{-11} \text{ W/cm}^2$

9. Oblicz liczbę decybeli hałasu ruchu ulicznego, którego natężenie jest milion razy większe od progu słyszalności.

10. Hałas w pubie wynosi 80 dB. Oblicz natężenie hałasu.

11. Oblicz głośność rozmowy, dla której $I = 10^{-3} \text{ W/m}^2$.

12. Głośność zmierzona obok startującego odrzutowca wyniosła 115 decybeli. Delfiny butelkonose wydają podczas polowania dźwięki o sile 230 dB ogłuszając i zabijając ryby.

- Ile razy większą siłę natężenia dźwięku mają delfiny niż odrzutowiec?
- Oblicz o ile decybeli zmaleje głośność dźwięku, gdy jego natężenie zmaleje czterokrotnie?

13. Jakie jest ciśnienie barometryczne b_2 na wierzchołku góry Matterhorn, jeżeli jej wysokość wynosi 4478 m, a ciśnienie $b_1 = 705 \text{ hPa}$. Skorzystaj z internetowych kalkulatorów fizyko-chemicznych do przeliczenia wartości ciśnienia na mmHg.

14. Jakie jest ciśnienie pary etylenu C_2H_4 w temperaturze 110°C ? Zależność między ciśnieniem p pary węglowodorów nienasyconych a ich temperaturą określa wzór empiryczny:

$$\log p = A - \frac{B}{t + 273}, \text{ gdzie } A, B \text{ są stałymi zależnymi od rodzaju węglowodoru: dla etylenu}$$

$$A = 7,245; B = 739.$$