SCENARIUSZ LEKCJI MATEMATYKI

Temat: Zadania na dowodzenie w trygonometrii. **Cel:** Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.
Czas: 1 godzina lekcyjna
Cele zajęć: **Uczeń po zajęciach:** • wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego), • stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów, • korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych, • stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi.
Metody pracy: • ćwiczenia • dyskusja
Formy pracy: • praca w parach • praca z całą klasą
Materiały dydaktyczne: • plansze z wzorami • tablice matematyczne • karty pracy

Przebieg zajęć:
1. Przedstawienie celów lekcji.
2. Sprawdzenie zadania domowego – przypomnienie wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumy i różnicy sinusów i cosinusów kątów (np. wykorzystanie metaplanu).
3. Podział klasy na rzędy i w parach uczniowie rozwiązują zadania 1, 3, 5 i 10 (każdy rząd inne, dla uczniów szybciej pracujących zostaje zadanie 6).
4. Wybór uczniów do prezentacji rozwiązań-prezentacja rozwiązań, dyskusja, ocena.
5. Praca domowa (zadanie nr 2 z listy zadań - obowiązkowe, a pozostałe zadania dla chętnych).

ZAŁĄCZNIK I – karty pracy

Karta pracy 1

Zad.1. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta takimi, że $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$, to $tg\,\frac{\alpha}{2}\cdot tg\,\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$.

Karta pracy 2

Zad.3. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ nie zależy od β.

Karta pracy 3

Zad.5. Wykaż, że jeśli kąty α, β, γ trójkąta spełniają równanie $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Karta pracy 4

Zad. 10. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest prosty i $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$, to $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{b-a}{c\sqrt{2}}$.

Materiały edukacyjne wypracowane w trakcie szkolenia
Organizacja pracy nauczyciela matematyki na IV etapie edukacyjnym.
Sulejówek, 22-24.03.2015 r. Ośrodek Rozwoju Edukacji

ZAŁĄCZNIK II - rozwiązania zadań

Zad. 1.

Dane: $\alpha, \beta, \gamma \in (0^0; 180^0)$

Jeśli $* \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$ to $tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$ *Wskazówka*: $\beta = 180^0-(\alpha+\beta)$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sin(90^0-(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}))=\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2})=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Wstawiając wyznaczone $\sin\frac{\beta}{2}$ do * mamy:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ Obustronnie dzielimy przez $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

Zatem: $tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$

Zad.2. Wykaż, że jeśli α,β,γ są katami ostrymi takimi, że $tg\alpha=\frac{1}{2},\ tg\beta=\frac{1}{5}\ i\ tg\gamma=\frac{1}{8}$, to $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$.

Wskazówka: Jeśli $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$, to $tg(\alpha+\beta+\gamma)=1$

$$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{tg(\alpha+\beta)+tg\gamma}{1-tg(\alpha+\beta)\cdot tg\gamma}=\frac{\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}+\frac{1}{8}}{1-\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}+\frac{1}{8}}{1-\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}}=1$$

ckd

Zad.3. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ nie zależy od β.

W dowodzeniu wykorzystuję wzór: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cdot(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta-2\cos^2\alpha\cos^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\beta(\cos^2\alpha-1)=\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\sin^2\alpha$$

, $\sin^2\alpha$ nie zależy od β, ckd

Zad.5. Wykaż, że jeśli kąty α,β,γ trójkąta spełniają równanie $\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Skorzystamy z tw. sinusów: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, gdzie a, b, c – długości boków trójkąta.

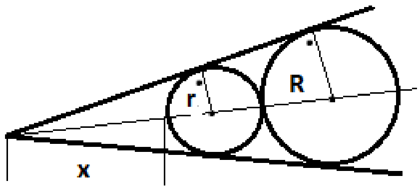
$$\begin{cases} a\sin\beta=b\sin\alpha \\ b\sin\gamma=c\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2\sin^2\beta=b^2\sin^2\alpha \\ b^2\sin^2\gamma=c^2\sin^2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=\dfrac{a^2\sin^2\beta}{b^2} \\ \sin^2\gamma=\dfrac{c^2\sin^2\beta}{b^2} \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$
$$\frac{a^2\sin^2\beta}{b^2}=\frac{c^2\sin^2\beta}{b^2}+\sin^2\beta$$
$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}+1$$
$$a^2=c^2+b^2$$

Na podstawie tw. odwrotnego do tw. Pitagorasa, dany trójkąt jest prostokątny.

Zad.6. Dwa koła styczne zewnętrznie mają wspólne styczne przecinające się pod kątem.

Wykaż, że stosunek promieni tych kół jest równy liczbie $s=\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.



$$\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}=\dfrac{r}{x+r}\\ \sin\frac{\alpha}{2}=\dfrac{R}{x+R+2r}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sin\frac{\alpha}{2}=r-r\sin\frac{\alpha}{2}\\ x\sin\frac{\alpha}{2}=R-(R+2r)x\sin\frac{\alpha}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{r(1-x\sin\frac{\alpha}{2})}{x\sin\frac{\alpha}{2}}\\ x=\dfrac{R-(R+2r)x\sin\frac{\alpha}{2}}{x\sin\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$$

$$r-r\sin\frac{\alpha}{2}=R-R\sin\frac{\alpha}{2}-2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$r-r\sin\frac{\alpha}{2}=R-R\sin\frac{\alpha}{2}-2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

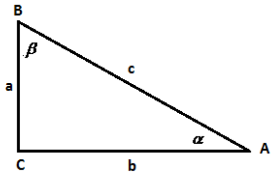
$$r+r\sin\frac{\alpha}{2}=R-R\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$r(1+\sin\frac{\alpha}{2})=R(1-\sin\frac{\alpha}{2})$$

$$\frac{r}{R}=\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$s=\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}},\quad c.n.d$$

Zad. 10. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest prosty i $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$, to $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{b-a}{c\sqrt{2}}$.



$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{b-a}{c\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{b-a}{c\sqrt{2}} = \frac{b-a}{c}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{b}{c}-\frac{a}{c}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = (\sin\beta - \sin\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 2\cos 45^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \sin\frac{\beta-\alpha}{2} = L$$

$\underline{L = P, ckd}$

Materiały edukacyjne wypracowane w trakcie szkolenia
Organizacja pracy nauczyciela matematyki na IV etapie edukacyjnym.
Sulejówek, 22-24.03.2015 r. Ośrodek Rozwoju Edukacji

ZAŁĄCZNIK III

Trygonometria-zadania na dowodzenie*(N. Dróbka, K. Szymański kl. III-IV)*

Zad.1. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta takimi, że $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$, to $tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$.

Zad.2. Wykaż, że jeśli α, β, γ są katami ostrymi takimi, że $tg\alpha=\frac{1}{2},\ tg\beta=\frac{1}{5}\ i\ tg\gamma=\frac{1}{8}$, to $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$.

Zad.3. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ nie zależy od β.

Zad.4. Udowodnij, że długości boków a, b, c dowolnego trójkąta spełniają nierówność $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$.

Zad.5. Wykaż, że jeśli kąty α, β, γ trójkąta spełniają równanie $\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Zad.6. Dwa koła styczne zewnętrznie mają wspólne styczne przecinające się pod kątem.

Wykaż, że stosunek promieni tych kół jest równy liczbie $s=\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Zad.7. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2\cos\gamma$, to trójkąt jest równoramienny.

Zad.8. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta , zaś a, b, c długościami odpowiednich boków, to $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$.

Zad.9. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\sin\gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Zad. 10. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest prosty i $|BC|=a, |AC|=b, |AB|=c$, to $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{b-a}{c\sqrt{2}}$.

Zad.11. Wykaż, że jeśli $\cos(\alpha+\beta)=a, \cos(\beta+\gamma)=b, \cos(\gamma+\alpha)=c$ oraz $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, to $a^2+b^2+c^2-2abc=1$.

Zad.12. Wykaż, ze funkcja określona wzorem $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\frac{\pi}{3}+x)-\cos x\cos(\frac{\pi}{3}+x)$ jest funkcją stałą.