SCENARIUSZ LEKCJI MATEMATYKI

Temat: Podzielność liczb całkowitych **Cel:** Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność
Czas: 1 godzina lekcyjna
Cele zajęć: Uczeń: • przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach; • opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami; • używa wzorów skróconego mnożenia; • rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;
Metody pracy: • ćwiczenia, • dyskusja
Formy pracy: praca w grupach, praca z całą klasą
Materiały dydaktyczne: ▪ plansze z wzorami ▪ karty pracy (wersja dla zakresu podstawowego i rozszerzonego)

Przebieg zajęć:

1. Przedstawienie celów lekcji.
2. Sprawdzenie zadania domowego – przypomnienie wzorów skróconego mnożenia
3. Podział klasy na grupy i rozdanie kart pracy.
4. Wybór uczniów do prezentacji rozwiązań.
5. Praca domowa (pozostałe zadanie z listy).

ZAŁĄCZNIK I – karty pracy (zakres podstawowy)

Karta pracy 1

Zad.1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci + 7 jest podzielna przez 8.

Karta pracy 2

Zad.2. Wykaż, że jeśli dwie liczby całkowite różnią się o 2, to różnica ich czwartych potęg jest podzielna przez 8.

Karta pracy 3

Zad.8. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5.

Karta pracy 4

Zad. 5. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to (n-1)(n+1)(n+3) jest liczbą podzielną przez 48.

ZAŁĄCZNIK II – szkice rozwiązań zadań

Zad.1.

Dane: $n = 2k + 1 = 3t$ n,k,t: liczby naturalne
∈∈

Zatem: $+ 7 = (2k +1)^2 + 7 = + 4k + 8 = 4k(k + 1) + 8$

Liczba $4k(k+1)$ jest podzielna przez 8.

Zad.2.

Dane: $k – t = 2$ k,t: liczby całkowite
∈∈

Zatem: $– = (–)(+) = (k – t)(k + t)(+),$

$k = t + 2$, to $2(2 + 2t)[(2 +t)^2 +] = 8(t +1)(2 + 2t +)$

Zad.8.

Dane : $7k + 3, 7t + 4$ k, t: liczby całkowite

Zatem: $(7k + 3)(7k + 4) =$ …..= $7(7kt + 4k + 3t +1) +5$

Zad.5.

Dane: $n = 2k +1$ k: liczba naturalna

Zatem: $(2k + 1 – 1)(2k +1 + 1)(2k + 1 + 3) =$…..= $8k(k + 1)(k + 2)$

Liczba $k(k + 1)(k + 2)$ jest podzielna przez 6.

ZAŁĄCZNIK III – karty pracy (zakres rozszerzony)

Karta pracy 1

Zad.3. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

Karta pracy 2

Zad.6. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną taką, że $n-3$ jest podzielne przez 4, to n^3+9 jest podzielne przez 2.

Karta pracy 3

Zad.7. Udowodnij, że $10|53^{53}-33^{33}$.

Karta pracy 4

Zad.9. Liczby $10^{20}-1$ i $10^{30}-1$ są podzielne przez 41. Uzasadnij, że liczby $10^{30}-10^{20}$ i $10^{12}-100$ są również podzielne przez 41.

ZAŁĄCZNIK IV – szkice rozwiązań zadań

Zad.3

Musimy pokazać, że

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

dzieli się przez 24, czyli, że dzieli się przez 8 i przez 3. Ponieważ p jest liczbą pierwszą większą od 3, więc nie dzieli się przez 3. Zatem przez 3 dzieli się jedna z liczb $p-1$ lub $p+1$, czyli p^2-1 dzieli się przez 3.

Pozostało wykazać, że p^2-1 dzieli się przez 8. Liczba p jest nieparzysta, więc jest postaci $4k+1$ lub $4k+3$ (bo nie może być postaci $4k+2$ ani $4k$). Zatem odpowiednio

$$p^2 - 1 = (4k+1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 1 - 1 = 8(2k^2 + k)$$
$$p^2 - 1 = (4k+3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 8(2k^2 + 3k + 1).$$

W obu przypadkach otrzymujemy liczbę podzielną przez 8.

Zad.6

Dane: n – 3 = 4k   k jest liczbą naturalną

Zatem: n = 4k + 3

$+ 9 = (4k + 3)^3 + 9 = ++ 108k+27+9 = ++ 108k+36 =$

$= 2(++54k+18)$

Zad.7

53 ≡ 3 (mod 10)	33 ≡ 3 (mod 10)
≡ 9 ≡ -1 (mod 10)	≡ 9 ≡ -1 (mod 10)
$()^{26} \equiv \equiv (-1)^{26} \equiv 1$ (mod 10)	$()^{16} \equiv \equiv (-1)^{16} \equiv 1$ (mod 10)
≡ 1 (mod 10)	≡ 1 (mod 10)
≡ 3 (mod 10)	≡ 3 (mod 10)

≡ (mod 10), co świadczy o tym, że liczba – jest podzielna przez 10.

Zad.9

Dane: – 1 = 41k , – 1 = 41t   k, t: liczby naturalne

Zatem: = 41k + 1, = 41t + 1

– = 41t + 1 – (41k + 1) = 41(t – k)

Zauważmy ponadto, że

– = (–) = (– 100)

Ponieważ nie dzieli się przez 41 i 41 jest liczbą pierwszą, liczbą podzielną przez 41 musi być – 100.

ZAŁĄCZNIK V

Podzielność liczb całkowitych - zadania (zasoby Internetu).

Zad.1. Wykaż, że jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 6, to liczba postaci $n^2 + 7$ jest podzielna przez 8.

Zad.2. Wykaż, że jeśli dwie liczby całkowite różnią się o 2, to różnica ich czwartych potęg jest podzielna przez 8.

Zad.3 Wykaż, że jeżeli *p* jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2 przy dzieleniu przez 24 daje resztę 1.

Zad.4. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej *n* liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Zad.5. Wykaż, że jeżeli *n* jest liczbą nieparzystą to liczba $(n-1)(n+1)(n+3)$ jest liczbą podzielną przez 48.

Zad. 6. Udowodnij, że jeżeli *n* jest liczbą naturalną taką, że $n - 3$ jest podzielne przez 4, to $n^3 + 9$ jest podzielne przez 2.

Zad. 7. Udowodnij, że $10|53^{53} - 33^{33}$.

Zad.8. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daję resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

Zad.9. Liczby $10^{20} - 1$ i $10^{30} - 1$ są podzielne przez 41. Uzasadnij, że liczby $10^{30} - 10^{20}$ i $10^{12} - 100$ są również podzielne przez 41.

Zad.10. Znajdź cyfry *x, y, z* wiedząc, że liczba xyz138 dzieli się przez 7, liczba 138xyz przy dzieleniu przez 13 daje resztę 6, a liczba x1y3z8 przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5.