

Dowody w trygonometrii

(zadania: N.Dróbka, K.Szymański kl.III-IV; wybór: Ewa Ludwikowska)

Zad.1. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta takimi, że $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\beta}{2}$, to $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$.

Zad.2. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami ostrymi takimi, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$ i $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{8}$, to $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

Zad.3. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2 \beta - 2\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$ nie zależy od β .

Zad.4. Udowodnij, że długości boków a, b, c dowolnego trójkąta spełniają nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$

Zad.5. Wykaż, że jeśli kąty α, β, γ trójkąta spełniają równanie $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Zad.6. Dwa koła styczne zewnętrznie mają wspólną styczną przecinającą się pod kątem α . Wykaż, że stosunek promieni tych kół jest równy liczbie $s = \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Zad.7. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$, to trójkąt jest równoramienny.

Zad.8. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta, zaś a, b, c długościami odpowiednich boków, to $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma}$.

Zad.9. Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta i $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sin \gamma$, to trójkąt jest prostokątny.

Zad. 10. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest prosty i $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$, to $\sin \frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{c\sqrt{2}}$.

Zad.11. Wykaż, że jeśli $\cos(\alpha + \beta) = a, \cos(\beta + \gamma) = b, \cos(\gamma + \alpha) = c$ oraz $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 1$.

Zad.12. Wykaż, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \text{ jest funkcją stałą.}$$