EX CATHEDRA

Zbigniew Semadeni

# Ocenianie matematycznych umiejętności uczniów klas 1–3

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Redaktor prowadzący
**Agnieszka Brodowska**

Redakcja językowa i korekta
**Katarzyna Gańko**

Opracowanie graficzne, projekt okładki i skład
**Barbara Jechalska**
(z wykorzystaniem motywu zaprojektowanego
przez Studio Kreatywne Małgorzaty Barskiej)

Zdjęcie na okładce: contrastwerkstatt/Fotolia.com

Rysunek
**Elżbieta Śmietanka-Combik** (s. 12)



Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl
tel. 22 345 37 00
fax 22 345 37 70

# Spis treści


1. Cele i funkcje oceniania uczniów ... 4
2. Ocenianie kształtujące i informacje zwrotne ... 8
3. Zadania trudniejsze ... 13
4. Ocenianie w ujęciu behawiorystycznym i konstruktywistycznym ... 14
5. Ocenianie rozwiązań zadań tekstowych ... 17
6. Niepowodzenia szkolne z matematyki ... 20
7. Rozumienie pojęć i obliczeń przez dziecko ... 21
8. Różnorodność rozwiązań i obliczeń ... 23
9. Matematyka widziana jako system nakazów i zakazów ... 25
10. Automatyzacja obliczeń ... 26
11. Cele operacyjne ... 27
12. Znak „mniejszy”, znak „większy” ... 29
13. Czy matematykę mogą opanować tylko specjalnie uzdolnieni uczniowie? ... 31

Bibliografia ... 33

# 1. Cele i funkcje oceniania uczniów

Ocenianiu uczniów poświęcono wiele publikacji, zarówno podejmujących ten problem w szerokim kontekście, jak i opisujących aktualne tendencje w polskiej szkole. Obecnie obowiązujące i oficjalnie zalecane zasady oceniania omówione zostały w poradniku *Ocenianie uczniów w klasach 1–3*, wydanym przez Ośrodek Rozwoju Edukacji (ORE).

Ocenianie wiedzy uczniów może służyć różnym celom. Wyróżnię trzy podstawowe typy takiego oceniania dla celów edukacyjnych.

- Badanie **naukowe** (krajowe lub międzynarodowe) osiągnięć **anonimowych** uczniów dla potrzeb dydaktyk szczegółowych i dla optymalizowania polityki edukacyjnej. Publikuje się tylko ich wyniki zbiorcze, uśrednione, bez ocen poszczególnych uczniów lub szkół. Są to np. badania w ramach Programu Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (PISA), niektóre badania Instytutu Badań Edukacyjnych (IBE), a także wiele innych badań organizowanych na mniejszą skalę m.in. przez pracowników wyższych uczelni.
- Ocenianie osiągnięć uczniów **w skali masowej** połączone z **informacją zwrotną**, którą otrzymują badani uczniowie i ich nauczyciele. To np. sprawdzian Centralnej Komisji Edukacyjnej (CKE) po klasie 6, egzamin gimnazjalny i maturalny, Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) po klasie 3, badanie Kompetencje piątoklasistów (K5 2015) prowadzone przez IBE w 2015 r.[1], a także badania niektórych wydawców edukacyjnych.
- Ocenianie uczniów w klasie przez **nauczyciela**, w tym **diagnozowanie** ich postępów i trudności (zarówno ukrytych, jak i ujawniających się przez popełniane błędy).

Zajmę się tu tylko tym ostatnim typem oceniania wiedzy. Będę go szeroko naświetlał, kładąc nacisk na problemy dzieci z matematyką w klasach 1–3.

Przede wszystkim trzeba rozróżnić trzy rodzaje oceny:

(A): ocenianie osiągnięć ucznia przez porównanie jego **aktualnej** wiedzy i umiejętności z **wcześniej ustaloną listą** wymogów czy oczekiwań (najczęściej jest to podstawa programowa lub jakiś dokument przyjęty w szkole);

[1] Więcej informacji: https://k5.ibe.edu.pl/opis_badania [online, dostęp dn. 21.01.2016].

(B): ocenianie osiągnięć ucznia przez zestawienie jego **wyjściowej** wiedzy i umiejętności (na początku danej klasy czy etapu kształcenia) z jego **późniejszą** wiedzą i umiejętnościami;

(C): ocenianie ucznia **na tle klasy** (w tym ocenianie klasy jako całości i każdego ucznia na jej tle), przy czym chodzi nie tylko o wiedzę i umiejętności ucznia, lecz także o jego **funkcjonowanie w grupie rówieśniczej**.

Wszystkie te trzy rodzaje oceny są istotne, ale ocenianiu (A) przypisuje się obecnie nadmierne znaczenie, nie zwracając należytej uwagi na (C). Ponadto nauczyciel często koncentruje się na tych uczniach, którzy mają trudności w nauce, i nie zajmuje się dostatecznie dziećmi uzdolnionymi ponad przeciętną.

Obowiązujące w Polsce prawo oświatowe określa główne kierunki i zasady oceniania, klasyfikowania i promowania, nie narzucając przy tym szczegółowych rozwiązań dotyczących wewnętrznych zasad oceniania – te są ustalone przez szkołę. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej podkreśla **potrzebę indywidualnego podejścia do poszczególnych dzieci** i dostosowania wymagań do możliwości uczniów[2]. Powinno stosować się to – moim zdaniem – zarówno do dzieci mających jakieś orzeczenia, jak i do pozostałych uczniów. Postulat indywidualnego podejścia jest powszechnie głoszony, gorzej z jego realizacją, zwłaszcza w przypadku licznych klas.

Jako jeden z celów oceniania przez nauczyciela często wymienia się **motywowanie uczniów do nauki**. Dobre oceny mogą rzeczywiście mieć skutek pozytywny, gdy naturalna motywacja dziecka do nauki zostaje wzmocniona przez pozytywną ocenę osoby dla niego znaczącej. Jednakże motywacja do uczenia się oparta jedynie na chęci otrzymania nagrody w postaci dobrej oceny lub na strachu przed złym stopniem jest **motywacją zewnętrzną**, długofalowo mało skuteczną. Na wzmacnianiu motywacji zewnętrznej opiera się podejście behawiorystyczne do nauczania.

Dużo ważniejsze jest wspomaganie **motywacji wewnętrznej** dziecka, w której chęć nauczenia się czegoś wynika z naturalnej ciekawości i potrzeby poznania czegoś nowego, z satysfakcji z dobrze wykonanego zadania. Na rozwijaniu motywacji wewnętrznej opiera się podejście konstruktywistyczne. Tematyka zajęć szkolnych powinna być **poznawczo atrakcyjna** dla uczniów. Musi być też **przystępna**, nie może przekraczać ich możliwości.

[2] *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dn. 10 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych* (Dz.U. z 2015 r. poz. 843).

Edukacja jest skuteczna, gdy dzieci są świadome, że nauczyły się czegoś wartościowego, i gdy ten właśnie fakt jest dla nich nagrodą.

Ze względu na różnorodność uczniów i tematów nauczania w praktyce nie da się oprzeć kształcenia na samej motywacji wewnętrznej. Powinna być zachowana sensowna **równowaga** między oboma opisanymi typami motywacji.

Badania pokazują, że w pewnych sytuacjach człowiek początkowo wykonywał jakąś czynność ze swej motywacji wewnętrznej, ale gdy potem była ona długo i silnie nagradzana, to motywacja zmieniła się na zewnętrzną i badany człowiek stracił przyjemność z wykonywania tej czynności.

Ocenianie szkolne może też odgrywać inne role. Jedną z nich jest **selekcja** uczniów, wpływająca na ich dalsze losy – to jedna z funkcji egzaminu maturalnego (organizowanego przez CKE jako forma oceniania **zewnętrznego** w stosunku do szkoły). Podobną funkcję pełni też w pewnym stopniu egzamin gimnazjalny, gdyż to na podstawie jego wyników szkoły ponadgimnazjalne ustalają swoje indywidualne progi punktowe. W większych miastach, w których jest wiele gimnazjów, po sprawdzianie dla klas 6 uczniowie przyjmowani są do różnych szkół, co też różnicuje ich losy edukacyjne. Jednakże zasadniczo selekcyjna funkcja oceniania szkolnego nie powinna mieć miejsca w szkole podstawowej, a zwłaszcza w klasach początkowych.

Ważne jest też **prognozowanie** dalszych możliwości danego ucznia. Popularne są obecnie testy diagnozujące możliwości i wiedzę uczniów przeprowadzane na początku danego etapu kształcenia. Przewidywanie oparte na ocenie możliwości poszczególnych uczniów i klasy jako całości dokonane przez nauczyciela powinno być uwzględniane przy **dostosowaniu dalszego nauczania** do możliwości danej klasy.

Trzeba jednak pamiętać, że niewłaściwa, nieprzemyślana ocena nauczyciela może stać się **samospełniającą się przepowiednią**. To dość częsty przypadek. Nauczyciel klas 1–3 – świadomie lub nieświadomie – przekazuje klasie sygnał: „matematyka jest dla was za trudna, jedynie uczeń o specjalnych zdolnościach może ją zrozumieć”. To wpływa negatywnie na motywację dzieci, a gdy wyniki rzeczywiście okazują się kiepskie, nauczyciel może czuć się rozgrzeszony brakiem zdolności swoich podopiecznych. Dlatego tak ważne jest, by informacja zwrotna była rzetelna, zrozumiała dla uczniów, by nie zawierała jakichkolwiek dodatkowych wtrąceń.

Zdarzało się nawet, że już w klasie 1 niektóre dzieci słyszały od nauczyciela, że są „głupie z matematyki" (mógł to być podobny w treści komunikat wyrażony łagodniejszymi słowami). Traciły wówczas wiarę w siebie, a nauczyciel nie poświęcał im należytej uwagi. Często dotyczyło to uczniów, którzy **świetnie daliby sobie radę, gdyby nauczanie było bardziej przyjazne**, mniej abstrakcyjne i prowadzone w wolniejszym tempie. Miejmy nadzieję, że społeczeństwo w coraz większym stopniu będzie świadome, że takie etykietowanie dzieci jest niewłaściwe.

W edukacji wczesnoszkolnej ocena śródroczna i roczna musi mieć postać **oceny opisowej**, natomiast sposób oceniania bieżącego jest ustalany przez szkołę i może mieć inną formę. Informacje o ocenie opisowej można znaleźć m.in. we wspomnianej publikacji ORE. **Pojedynczą liczbą nie da się wyrazić pełnej informacji o postępach danego dziecka**. Dobrze zredagowana ocena opisowa może najtrafniej określić poziom i osiągnięcia ucznia. Wiadomo, że ten sposób przekazywania oceny ma wiele zalet, jakkolwiek bywa trudny i pracochłonny. Na ogół w publikacjach dla nauczycieli akcentuje się jedynie jego pozytywne aspekty.

Przymierzyłem się kiedyś do tego, by ułatwić nauczycielom sporządzanie sumującej oceny opisowej z matematyki na koniec klasy 3. Wypisałem wszystkie ważne elementy, które w takiej ocenie powinny być uwzględnione. Gdy to zrobiłem, zrozumiałem, że przygotowanie rzetelnej oceny z matematyki każdego z około 25 uczniów w klasie jest nierealne, a przecież oceniać trzeba wszystkie obszary edukacyjne. W praktyce ocena opisowa z matematyki bywa więc z konieczności formułowana dość ogólnie.

Bardzo utkwiła mi w pamięci Wiesława Śliwerska, fantastyczna nauczycielka ze Szkoły Podstawowej nr 37 w Łodzi. Spotkaliśmy się około 20 lat temu w czasie prac ministerialnych nad założeniami podstaw programowych edukacji wczesnoszkolnej. Poruszono wtedy kwestię m.in. oceny opisowej. Pani Wiesława powiedziała wówczas, że choć sama w swojej szkole używa oceny opisowej, jednak będzie głosować przeciwko narzucaniu nauczycielom obowiązku sporządzania takich ocen. Wie bowiem, że **nietrafną, pochopną oceną opisową można skrzywdzić dziecko bardziej niż oceną cyfrową** w postaci jedynki.

Później nauczyciele nauczyli się pisania ocen opisowych i robią to dwa razy w każdym roku szkolnym.

## 2. Ocenianie kształtujące i informacje zwrotne

W 2015 r. Ministerstwo Edukacji Narodowej (MEN) wprowadziło nowe zasady bieżącego oceniania uczniów. Jest to ważna próba uregulowania dowolności i subiektywności nauczycielskich ocen. W tych zasadach nacisk położony jest na dwie kwestie: ocenianie kształtujące (OK) i informacje zwrotne (IZ).

**Ocenianie kształtujące** ma być procesem, a nie jednorazowym aktem nastawionym na wynik, ma **wspierać i ukierunkowywać** czynności nauczyciela i aktywność ucznia. Głównym celem tego oceniania jest pomaganie dziecku w procesie uczenia się, ocena ma towarzyszyć temu procesowi i go wspomagać (z tego powodu niektórzy traktują OK raczej jako pewną koncepcję kształcenia niż jako ocenianie).

**Informacje zwrotne** są przeznaczone dla ucznia. Powinny spełniać następujące warunki:

- ich forma ma być zrozumiała przez ucznia;
- mają być trafne, konkretne, możliwie szybko, bez zbędnej zwłoki przekazane uczniowi;
- zawierają ocenę wiedzy ucznia, a nie jego osoby;
- zakładają nie stawianie stopnia (ani cyfrowego, ani krótkiej ogólnej słownej oceny typu dobrze/źle), lecz rozmowę z uczniem.

We wspomnianym rozporządzeniu MEN czytamy: „Ocenianie bieżące z zajęć edukacyjnych ma na celu monitorowanie pracy oraz przekazywanie uczniowi informacji o jego osiągnięciach edukacyjnych pomagających w uczeniu się, poprzez wskazanie, co uczeń robi dobrze, co i jak wymaga poprawy oraz jak powinien dalej się uczyć".

Od oceniania kształtującego wyraźnie różni się **ocenianie sumujące**, mające na celu ocenę stanu wiedzy uzyskanej przez ucznia po zakończeniu jakiegoś etapu nauki szkolnej, w szczególności przy przechodzeniu z klasy 3 do 4. Nastawione jest na ocenę wyniku kształcenia, a nie na proces. Może to być ocenianie rodzaju (A) lub (B) w sensie podanym na początku tego wykładu. Głównym celem oceniania sumującego powinna być obiektywna informacja o wiedzy i umiejętnościach uczniów przeznaczona dla nauczyciela następnej klasy (którego obowiązuje znajomość podstawy programowej klas 1–3).

Dopóki mowa jest o ogólnych zasadach, wszystko to brzmi przekonująco. Trudności ujawniają się dopiero, gdy analizuje się szczegóły. Nauczyciel powinien być świadomy, że nie można zbyt formalnie, mechanicznie stosować ogólnych zaleceń administracji oświatowej i haseł z różnych kursów. Powinien przede wszystkim mieć na uwadze potrzebę rzetelnego i zrozumiałego przekazania właściwych informacji uczniowi i rodzicom.

Dla mnie kluczową kwestią jest **wyraźne oddzielenie fazy uczenia się od fazy sprawdzania nabytych wiadomości**. Na zwykłej lekcji uczymy się. Nauczyciel pomaga uczniom, daje im wskazówki, pokazuje, co trzeba poprawić. Uczniowie powinni mieć wtedy poczucie, że te zajęcia nie służą ocenianiu. Chodzi o to, aby w fazie uczenia się dzieci były możliwie aktywne, **nie uruchamiały mechanizmów obronnych**, nie bały się oceny negatywnej, nie starały się ukryć, że czegoś nie rozumieją i że mają trudności. Oczywiście w czasie tych zajęć nauczyciel z konieczności obserwuje uczniów i ocenia to, co mówią i robią, udzielając im wskazówek, ale co szczególnie ważne – dzieci powinny to odczuwać jako **życzliwą pomoc**, a nie ocenianie. Jest to szczególnie ważna kwestia.

Dopiero po zakończeniu jakiegoś etapu nauki (np. po czterech tygodniach uczenia się lub po zakończeniu pewnego zakresu materiału kształtującego określoną umiejętność) powinna być wyraźnie wyodrębniona lekcja **powtórzeniowo-oceniająca**. To cykliczny sprawdzian mający wyraźne cele:

- jeszcze raz powtarzamy najważniejsze rzeczy, których się uczyliśmy;
- przekonujemy się, ile się nauczyliśmy;
- dostajemy zadania, których wykonanie oceni nasza pani – powie nam, co zrobiliśmy dobrze, a czego musimy się jeszcze nauczyć.

Informacja zwrotna przekazana uczniowi ma zawsze dotyczyć konkretnych kwestii. Należy unikać odpowiedzi ogólnie wartościujących („twój sprawdzian wypadł źle”, a nawet „masz błędy w dodawaniu”). Powinno się wyraźnie wskazać, w których miejscach ujawniły się braki, co należy poprawić i jak uzupełnić.

W niektórych publikacjach twierdzi się, że nauczyciel powinien sformułować uczniom jasne **kryteria sukcesu**. Dokładniejsze przyjrzenie się tej koncepcji i używanym sformułowaniom pokazuje, że z jednej strony bywa to nastawione na klasy starsze (świadczą o tym zwroty takie jak „uczniowie mają wpływ na wybór celów i ustalanie kryteriów sukcesu”), a z drugiej – że chodzi w gruncie rzeczy o dwie istotnie różne koncepcje.

- Kryteria sukcesu pierwszego typu ($S_1$) dotyczą jasnego **sprecyzowania zamierzonego celu danej jednostki metodycznej** (tj. jednej lekcji lub serii lekcji dotyczących wyraźnie określonego zagadnienia). Powinny one być wyraźnie podane uczniom przy rozpoczynaniu tej jednostki (typowe określenie: „nauczyciel planuje kryteria sukcesu i przekazuje je uczniom”).

- Kryteria sukcesu drugiego typu ($S_2$) są rozumiane jako **kryteria oceniania**, dotyczą tego, na jakie elementy nauczyciel będzie zwracać uwagę przy ocenianiu uczniów. Chodzi więc o **wymogi** uwzględniane przy ocenianiu **danego sprawdzianu**, podane uczniom przed jego rozpoczęciem.

Terminu „kryteria sukcesu” używa się także w innych kontekstach (np. kryteria sukcesu szkoły), nas jednak interesują powyższe dwa. Zaczniemy od pierwszego. Otóż w przypadku uczniów klas 1–3 kryteria sukcesu typu ($S_1$) dają się sensownie zastosować jedynie do wyraźnie określonych typów matematycznych kompetencji. Dość rzadko można kryteria sukcesu odnieść do wyników pojedynczej lekcji, np. nauczyciel mówi: „Dzisiaj nauczymy się pisać cyfrę 3” i rzeczywiście na koniec zajęć można oceniać opanowanie tej umiejętności. Jednakże na ogół taki wyraźny cel może jedynie dotyczyć jakiegoś dłuższego okresu nauki, np. jednym z celów wielomiesięcznej nauki w klasie 1 jest sprawne dodawanie i odejmowanie w zakresie 10.

Nie miałoby większego sensu zapowiadanie w formie dokonanej np. „Dzisiaj nauczymy się mnożyć przez 7” i oczekiwanie, że na opanowanie tej umiejętności wystarczy jedna lekcja (zapowiedzenie zaś np., że dzisiaj nauczymy się iloczynów $3 \cdot 7$, $4 \cdot 7$ i $5 \cdot 7$ miałoby sens tylko przy uczeniu na pamięć). **Dzielenie materiału na drobne, jednolekcyjne porcje** i każdorazowe sprawdzanie osiągnięcia takiego celu jest typowe dla **podejścia behawiorystycznego**.

Natomiast podejście konstruktywistyczne jest zupełnie inne: kształtujemy **pojęcia** związane z mnożeniem, rozwiązujemy zadania, **pogłębiamy rozumienie** związków mnożenia z innymi działaniami, a przy tym zapamiętujemy coraz więcej iloczynów. Myślimy o **mnożeniu jako całości**, a nie o poszczególnych iloczynach. Pożądane jest też, by uczeń zauważył (na trafnie dobranych przykładach lub na jakichś układanych konkretach) **związki** między różnymi obliczeniami, np. że skoro $3 \cdot 8 = 24$, to $6 \cdot 8 = 48$, bo 6 to 3 i 3, a więc 6 razy po 8 to 3 razy po 8 i 3 razy po 8. W ten sposób iloczyny z tabliczki mnożenia stopniowo staną się dla ucznia jedną zrozumiałą całością. Przy niewłaściwym zaś nauczaniu tabliczkę tę uczeń traktuje jako kilkadziesiąt osobnych **faktów liczbowych** (ang. *number facts*) do nauczenia się na pamięć.

Zgodnie z przykładem podanym w jednej z publikacji dydaktycznych uczniowie powinni nie tylko znać temat **lekcji**, lecz także wiedzieć, co nauczyciel chce na tej lekcji **osiągnąć**. Oto proponowane w tym duchu wprowadzenie nauczyciela do lekcji: *Będziecie potrafili dodawać* *i odejmować ułamki o różnych mianownikach*. Sformułowano też kryterium sukcesu, jakie ma sobie przedstawić uczeń: *Doprowadzam do wspólnego mianownika ułamki o różnych mianownikach i bezbłędnie obliczam wynik ich dodawania albo odejmowania*. Otóż świetnie wiadomo, że opanowanie (bezbłędne!) dodawania i odejmowania ułamków to nie jest kwestia jednej lekcji, lecz wielu tygodni nauki.

Ważniejsze są ($S_2$) – kryteria sukcesu odniesione do zakresu **sprawdzianu kończącego jakąś partię materiału** i do sposobów jego oceniania. Potrzeba jasnych kryteriów oceny sprawdzianu wynika z licznych nieporozumień między intencjami nauczyciela a oczekiwaniami uczniów, którzy nierzadko czują się potem skrzywdzeni. Nauczyciel powinien wcześniej wyraźnie objaśnić, jakie czynności uczniowie mają wykonać, a potem każdemu z nich przekazać informację, które zadania zrobił poprawnie i na czym polegały ewentualne błędy lub inne niedociągnięcia.

Jednakże w klasie 1 (a nieraz też w klasie 2 i 3) **sprawdziany nie powinny być w pełni pisemne**. Konieczne może być łączenie ich z rozmową z uczniami w trakcie samego sprawdzianu, a nawet pomaganiem im w pisaniu. Ważne, by odbywało się to w atmosferze życzliwości. Uczeń, który potrafi skorzystać z takiej pomocy, będzie miał **satysfakcję sukcesu**, a nauczyciel stwierdzi, czy zadania ze sprawdzianu znajdują się **w strefie najbliższego rozwoju** ucznia (w sensie Lwa Wygotskiego).

W klasie 3 można np. dać uczniom zadanie tekstowe do pisemnego rozwiązania i powiedzieć im, czego się oczekuje:

- działanie arytmetyczne ma być prawidłowo ułożone,
- ma być zapisany wynik obliczenia,
- ma być napisana odpowiedź (ewentualnie można też wymagać sprawdzenia wyniku).

Są to kryteria sukcesu w przypadku, gdy w rozwiązaniu zadania można wyróżnić wyraźne etapy.

W pewnych kwestiach wcześniejsze **zrozumienie kryteriów sukcesu mogłoby przekraczać możliwości uczniów**, wymagałoby bowiem przejścia z ich uczniowskiego poziomu myślenia i wiedzy do poziomu metodycznego, nauczycielskiego. Wyjaśnię to na przykładzie.

W podstawie programowej z 2008 r. wyodrębniono osobno wymagania stawiane uczniom na koniec klasy 1. Jeden z kluczowych wymogów brzmiał następująco: „Uczeń kończący klasę 1 ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów w porównywanych zbiorach” (MEN, 2008, s. 25). To sformułowanie ma jasną interpretację:

chodzi o osiągnięcie przez dziecko poziomu myślenia operacyjnego wyznaczonego przez test stałości liczby Jeana Piageta. Zgodnie z tym założeniem nauczyciel na początku klasy 1 powinien wiedzieć, czy każdy uczeń osiągnął ten poziom, a potem u tych, którzy go nie osiągnęli, **wspomagać naturalny proces dojrzewania**. Wówczas po kilku miesiącach niemal wszyscy dojrzeją do poziomu operacyjnego. **Nie da się ocenić poziomu operacyjności myślenia ucznia za pomocą sprawdzianu** (a tym bardziej za pomocą testu pisemnego). Badanym dzieciom nie da się też prosto przekazać o tym informacji zwrotnej ani sformułować im jasnych kryteriów sukcesu, bowiem nie byłyby w stanie tego pojąć.

Znaczenie operacyjności rozumowania szczegółowo omawia Edyta Gruszczyk-Kolczyńska w swych publikacjach, a w książce *Nauczycielska diagnoza edukacji matematycznej dzieci* napisanej wspólnie z Ewą Zielińską (2013) dokładnie opisuje, w jaki sposób nauczyciel może i powinien przeprowadzać **diagnozę nauczycielską**. Powinna ona obejmować jednocześnie wszystkie dzieci w danej grupie i ponadto każde dziecko na tle grupy. Przeprowadza się ją w celu uchwycenia różnic indywidualnych (różni się więc od diagnozy pedagogicznej, która dotyczy głównie trudności wychowawczych w pracy z jednostką lub grupą). Jest to ocenianie rodzaju (C) w sensie podanym na początku wykładu.

W zwykłej klasie 1 na ogół znajdują się dzieci, które nie osiągnęły jeszcze poziomu operacyjnego przed pójściem do szkoły. Szczególnie ważne jest, aby **nauczyciel nie wymagał od nich rozwiązywania zadań wymagających operacyjnego rozumowania**. Powinny natomiast dostawać dużo zadań na rachowanie na konkretach. Najlepszą strategią jest proponowanie dzieciom – na lekcjach i na sprawdzianach – **zadań wielopoziomowych**. Część uczniów rozwiąże je na konkretach i będzie to ich sukces. Inni rozwiążą je na poziomie symbolicznym. Jeszcze inni odpowiedzą na dodatkowe, trudniejsze pytanie.

Wrócę jeszcze do informacji zwrotnych. Pokażę pewien autentyczny przykład ukazujący, jak delikatna może być kwestia oceny poprawności odpowiedzi ucznia. Oto zadanie na sprawdzianie, który wiele lat temu pisali uczniowie klasy 2 w pewnej szkole. Narysowane były jabłka w charakterystycznym układzie:

Polecenie brzmiało: *Napisz mnożenie do tego rysunku*. Uczennica napisała: $3 \cdot 4 = 12$. Nauczycielka przekreśliła na czerwono zapis dziewczynki i napisała: $4 \cdot 3 = 12$, obniżając jednocześnie za ten błąd jej ocenę. Czy miała rację? Otóż rzeczywiście w polskich podręcznikach podaje się, że przy takim układzie przedmiotów mówimy, że mamy *4 razy* *po 3 jabłka*, i piszemy 4 · 3 = 12. Takiego właśnie symbolicznego zapisu wymagała nauczycielka. Można więc uznać, że miała rację. Uczennica czuła się jednak urażona. Mówiła: „przecież pani uczyła nas, że przy mnożeniu kolejność czynników nie ma wpływu na wynik, a teraz obniża mi ocenę”.

Moja refleksja jest nieco inna. Gdyby taki zapis mnożenia uczeń podał na sprawdzianie dla klasy 6 lub w gimnazjum, to nauczyciel uznałby go za poprawny, bowiem na poziomie algebry nie zwraca się uwagi na to, czy piszemy 4 · 3 czy 3 · 4. Kolejność czynników nie ma tam na ogół żadnego znaczenia. A więc w klasie 2 miałoby się obniżać ocenę za obliczenie, które nauczyciel matematyki w klasie 6 uznałby za poprawne! Ponadto zwyczajowa kolejność czynników w sytuacjach typu *tyle razy po tyle* nie jest żadną ogólną regułą matematyczną, lecz zależy od sposobu ujmowania takich sytuacji w danym języku, od gramatyki (np. w podręcznikach węgierskich kolejność czynników jest odwrotna od polskiej).

Powyższa sytuacja była w sumie bardzo prosta, a mimo to zarówno rozwiązanie podane przez ucznia, jak i ocena jego poprawności budzą zastrzeżenia. Podobne, a także znacznie poważniejsze wątpliwości pojawiały się wielokrotnie przy ocenianiu nietypowych rozwiązań różnego typu sprawdzianów i egzaminów. Każdy sprawdzian podsumowujący wiedzę uczniów powinien być **skrupulatnie przygotowany**, tak aby nie było potem wątpliwości przy ocenianiu. Niestety wśród materiałów dotyczących matematyki wczesnoszkolnej, oferowanych w sprzedaży, zdarzało się sporo zadań źle sformułowanych, których główną trudnością była nie kwestia matematyczna, lecz **domyślanie się intencji autora**.

## 3. Zadania trudniejsze

Postawię istotne pytanie dotyczące cyklicznych sprawdzianów postępów uczniów klas 1–3, o których była mowa wyżej. Czy oprócz zadań zwykłych, sprawdzających najważniejsze umiejętności, nauczyciel powinien też dać **zadania trudniejsze**, aby uczniowie, którzy osiągnęli wyższy poziom, bardziej uzdolnieni, również mogli się wykazać? Otóż jestem zdania, że takie zadania są niezmiernie ważne, ale powinny być wyraźnie **oddzielone** od głównej części sprawdzianu. Chodzi o to, **aby przeciętny uczeń nie odebrał ich jako zadań do wykonania przez wszystkich**, bowiem w przypadku gdy nie da rady, będzie to traktował jako swoje niepowodzenie, jako porażkę.

Lepiej przedstawiać uczniom takie zadanie jako coś, **co nie jest wymagane**. Normalne więc będzie, że komuś się nie uda, ale jeśli ktoś je rozwiąże, to będzie jego sukces. Kwestia ta była wyrazista m.in. na sprawdzianie OBUT pod koniec klasy 3 w 2013 r. Niektóre zadania były tam ciekawe, ale zarazem wyraźnie trudniejsze, wymagały bardziej złożonych rozumowań. Niestety badanie to było przedstawione nauczycielom, uczniom i w gazetach jako „sprawdzanie stopnia opanowania podstawy programowej", a więc jako test, który w zasadzie każdy uczeń powinien umieć rozwiązać. Słyszałem od wielu nauczycieli, że część dzieci nie dała sobie rady z tym trudnymi zadaniami, przyjęły to bardzo emocjonalnie, płakały, a niejedna nauczycielka zlitowała się i im pomogła. Nie doszłoby do tego, gdyby te trudniejsze zadania były przedstawione jako dodatek, jako **konkurs** dla chętnych uczniów.

Ogólnie biorąc, w przypadku zwykłych zajęć z całą klasą wszelkie zadania mniej typowe (wykraczające poza standardowy materiał) należy starać się ujmować nie w formie polecenia typu: *rozwiążcie*, lecz jako sugestię, że może jacyś chętni potrafiliby je rozwiązać. Formułujemy polecenie tak, by uczniowie czuli, że to jest coś nieobowiązkowego, że **zrobienie tego byłoby sukcesem**, natomiast **niezrobienie byłoby czymś zwyczajnym**, nie byłoby bynajmniej porażką. Chwali się potem tych, którzy próbują dać sobie radę z takim zadaniem, zaangażowali się w pracę i choć częściowo uwzględnili warunki zadania, nie ganiąc zarazem w żaden sposób tych, którzy tego nie potrafią lub nie mają dość wiary we własne możliwości. Zdarza się zresztą, że takie nietypowe zadanie rozwiąże niespodzianie uczeń, którego dotąd nauczyciel nie brał w ogóle pod uwagę.

## 4. Ocenianie w ujęciu behawiorystycznym i konstruktywistycznym

Zajmiemy się teraz ocenianiem uczniów zgodnie z podejściem behawiorystycznym i konstruktywistycznym.

Podstawowym elementem podejścia behawiorystycznego jest naukowo opracowana koncepcja **bodźców** S (ang. *stimulus*) i **reakcji** dziecka R (ang. *reactions*). Za właściwą reakcję R uczeń jest nagradzany – to wzmocnienie pozytywne. Nagroda za dobrą reakcję ma ją podtrzymać i utrwalić. Za złą reakcję R uczeń jest karany – to wzmocnienie negatywne, mające powstrzymać jednostkę przez powtórzeniem błędu. Bodźcem S może być zadanie matematyczne lub obliczenie do wykonania, np. $7 \cdot 8$, a oczekiwaną poprawną reakcją – liczba 56.

Dla behawiorystów **błędy ucznia są czymś, do czego nie należy dopuszczać**, co należy zdecydowanie zwalczać. Dlatego za błędy uczeń ma być karany.

W przypadku np. badania zachowań szczurów w labiryncie (z którego pochodzi znaczna część dawniejszych pedagogicznych koncepcji behawiorystów), nagrodą za dobre wykonanie zadania (za znalezienie właściwej drogi) było np. otrzymanie pożywienia, a karą – np. szok elektryczny. W przypadku dzieci karą było dawniej m.in. bicie rózgą lub pasem, dziś w szkole zakazane (ale bywa stosowane potem w domu, gdy dziecko przyniesie złe stopnie).

W szkolnym systemie nagrodą bywa dobry stopień i pochwała. Dla małego dziecka docenienie przez nauczycielkę jest ważną nagrodą. Karą zaś może być stopień niedostateczny, zganienie, krytykowanie ucznia na oczach klasy. Wielu uczniów bardzo to przeżywa.

Tak właśnie wygląda w skrócie behawiorystyczne podejście do oceniania: **system nagród i kar ma wspomagać uczenie się matematyki**. W Polsce behawioryzm nigdy nie był oficjalnie głoszony, ale pewne elementy takiego myślenia nieraz się ujawniają, a w szkołach ciągle spotyka się bardzo dużo tej niedobrej praktyki. Wiadomo jednakże, że traktowanie oceny szkolnej jako **mechanizmu przymusu** – w postaci nagradzania i karania – kończy się zwykle zniechęceniem ucznia do nauki. Dawniej stawiano też jedynki za złe zachowanie lub np. brak zeszytu.

Behawiorystyczne ocenianie ucznia polega na dawaniu mu na teście zadań pasujących do **ćwiczonych schematów** i stawianie punktów za każdą poprawnie wykonaną część testu. W systemie behawiorystycznym poprzez ćwiczenie wzmacnia się też pewne **skojarzenia** ruchowe lub słowne. W skrajnych wersjach (popularnych w Stanach Zjednoczonych) ćwiczy się arytmetykę, dając uczniowi słowne lub pisemne (np. na karcie wyciągniętej z zestawu) polecenie typu $2 + 6$ lub $3 \cdot 9$ i oczekując odpowiedzi w ciągu określonej liczby sekund. Tak opanowana wiedza nie ma szansy na późniejsze rozwinięcie się w wiedzę operacyjną i nie jest należytą podbudową dalszego nauczania, toteż **jest to wyjątkowo szkodliwa wersja nauczania na pamięć**. Ujawnia się w nieporadnym, bezmyślnym rozwiązywaniu zadań i w nieadekwatnym stosowaniu tak opanowanych umiejętności matematycznych w innych dziedzinach.

W środowiskach nauczycielskich panowało kiedyś przekonanie, że nie wolno, ani na moment, zostawić na tablicy błędnego zapisu, np. takiego jak $2 + 6 = 9$. Obawiano się, że gdy uczeń będzie na to patrzył, to tak zapamięta, tak mu się utrwali. Było to z gruntu fałszywe podejście, przeniesione mechanicznie z nauki ortografii, gdzie rzeczywiście nie należy pozwalać uczniowi patrzeć na błędne napisy takie jak *rzaba* i *żeka*, bowiem pisownia tych słów nie opiera się na jakiejś logice czy ogólnych zasadach, lecz głównie na pamięci wzrokowej. Natomiast **błędy arytmetyczne** uczniów **nie biorą się** bynajmniej **z patrzenia na błędne zapisy**. Wręcz przeciwnie, dziś daje się uczniom serie takich prawdziwych i fałszywych zapisów, aby sami odnaleźli błędy i je poprawili.

Przy podejściu konstruktywistycznym błędy uczniów uważa się za rzecz normalną. Głoszone jest **prawo ucznia do błędu**. Nie można nauczyć się matematyki, nie popełniając błędów, błędy są częścią procesu uczenia się. **Za błąd w trakcie uczenia się dziecko nie powinno być karane**. Trzeba natomiast mu pomóc zauważyć ten błąd, najlepiej tak, by samo go odkryło i poprawiło. Przykładowo: jeśli uczeń napisze 2 + 6 = 9, niech policzy na palcach lub patyczkach i poprawi wynik.

Oczywiście nie zawsze jest to tak proste. Nieraz **źródła błędów tkwią głęboko** w myśleniu ucznia i trzeba dużo czasu i cierpliwości na ich przezwyciężenie, jednakże z pewnością napominanie i karanie nic tu nie pomoże. Jeżeli np. uczeń jest na poziomie przedoperacyjnym w sensie Piageta, to żadne objaśnianie słowne i żaden system nagród i kar nie wspomoże go przy przejściu na wyższy poziom. Wręcz przeciwnie – kary spowodują jedynie frustrację, co zablokuje możliwość naturalnego rozwoju.

Przy nastawieniu konstruktywistycznym **w centrum uwagi jest uczeń**. To do jego potrzeb i możliwości mają być dostosowywane czynności nauczyciela. Natomiast przy nastawieniu behawiorystycznym **w centrum uwagi jest program nauczania**.

Typowo behawiorystyczne podejście ujawnia się w postaci bardzo szczegółowych **list kompetencji matematycznych**, które uczniowie mają opanować, a nauczyciel ma organizować dostosowane do tego sprawdziany. Podejście to cechuje duża ilość testów nastawionych na wyłapanie tego, **czego uczeń nie potrafi**.

Natomiast przy nastawieniu konstruktywistycznym kluczowe jest rozwijanie **myślenia** i **motywacji wewnętrznej** ucznia, kształtowanie jego właściwej **postawy** wobec matematyki i **wspomaganie go** w opanowaniu podstawowych umiejętności. Ważniejsze jest przy tym to, **czy uczeń lubi i rozumie matematykę**, którą się zajmuje, niż to, czy umie sprostać wszystkim wymogom z opracowanej przez kogoś listy kompetencji.

W Polsce w ostatnich latach znacznie zwiększyła się ilość testów dla młodszych dzieci. Zdarza się przy tym, że określony jest limit czasu na pisanie, skutkiem czego **uczeń wolniej pracujący lub dokładniejszy nie dostaje tyle czasu, ile potrzebuje,** i nie zdąży zrobić tego, co w zasadzie jest w zakresie jego możliwości. To szczególnie niekorzystne dla młodszych dzieci, dla których test sprawdzający wiedzę bywa doświadczeniem bardzo stresującym. Wiadomo, że **testy w warunkach stresu są szkodliwe** dla rozwoju dziecka. Próbuje się **wymusić** w ten sposób efekty kształcenia, choć psychologia rozwojowa wyraźnie wskazuje, że nie prowadzi to do powstania w umyśle dziecka trwałej wiedzy, która stałaby się należytym fundamentem dalszej nauki szkolnej.

Oczywiście nauczyciel powinien orientować się, jakie postępy robi każdy jego uczeń, z czym ma trudności. Istotne jest jednak nastawienie na **obserwowanie procesu uczenia się** (zwłaszcza w klasie 1) i **postępów** uczniów, mniej ważne są same wyniki. Pamiętać przy tym trzeba jednak, żeby nie przypisywać całej klasie jakiejś wiedzy na podstawie tego, że część śmielszych i bardziej zaawansowanych uczniów się nią wykaże. Pozostali albo przy tym milczą, albo naśladują słowa i czynności uczniów pochwalonych przez nauczyciela, choć nie musi to być ich rzeczywista wiedza.

W czasie sprawdzianu **uczeń powinien mieć prawo korzystania z konkretów** (patyczków, palców), jeśli czuje taką potrzebę. Wtedy w naturalny sposób ujawnią się poziomy: uczeń A oblicza z pomocą konkretów, uczeń B wykonuje obliczenia w myśli, ale obaj odnoszą sukces – każdy na swoją miarę.

W klasie 2 i 3 uczeń powinien wiedzieć, że może (a nieraz i powinien) posłużyć się pomocniczym, schematycznym rysunkiem, że **nie wymaga się, by pisał jedynie same działania arytmetyczne**[3]. Nasza szkoła jest nadmiernie nastawiona na formalnie poprawne **zapisy** działań arytmetycznych.

W klasach 1–3 to nie testy lub sprawdziany powinny odgrywać podstawową rolę przy ocenianiu. Dobrze, gdy informacja o postępach uczniów w większym stopniu opiera się na **systematycznej obserwacji** oraz analizie pracy i **postępów** dziecka. Niestety nieraz uczniowie dochodzą do wniosku, że jednym z głównych celów edukacji jest prawidłowe pisanie sprawdzianów.

## 5. Ocenianie rozwiązań zadań tekstowych

Zadania tekstowe to typowy element klasówek i innych sprawdzianów umiejętności matematycznych. Wielokrotnie stawiano pytanie: Dlaczego uczniowie na całym świecie mają **wielkie trudności** z zadaniami tekstowymi (zwanymi też zadaniami z treścią)? Nasuwają się rozmaite odpowiedzi.

- Uczeń **nie umie wykonać** odpowiednich **działań** arytmetycznych. To owszem może być przyczyną trudności, ale znane są liczne przypadki uczniów, którzy dobrze,

[3] Badania IBE pokazały, że znaczna część uczniów nie pomaga sobie żadnym rysunkiem, zwłaszcza w klasach 4–6.

ze zrozumieniem, potrafią wykonać niezbędne działania na liczbach, a mimo to nie wiedzą, jak rozwiązać dane im zadanie tekstowe.

- Uczeń **nie potrafi** uważnie **przeczytać** tekstu zadania lub **wkłada tyle wysiłku w sam proces czytania**, że uniemożliwia mu to myślenie nad rozwiązaniem. To niewątpliwie bywa też przyczyną nadmiernych trudności z zadaniami, ale z drugiej strony nieraz uczniowie potrafią nawet powtórzyć cały tekst usłyszanego dwukrotnie zadania, ale mimo to nadal nie potrafią go rozwiązać.
- Uczeń ma już wprawdzie wytworzone pewne umysłowe schematy liczbowe i wystarczającą praktykę obliczeniową, ale **brak mu należytego rozumienia tego, na czym polega istota zadania tekstowego**. Szczególnie ujawnia się to przy przechodzeniu od przedszkolnego sposobu myślenia do zrozumienia tego, że **odpowiednie obliczenia mogą prowadzić do znalezienia liczby, której nie znamy**. Jedne dzieci mylą zadania matematyczne z zagadkami, inne zaś traktują je jako niezrozumiały rytuał lub grę, w której trzeba stosować się do jakichś reguł podanych przez nauczyciela.

Wspomaganie kształtowania się w umyśle dziecka odpowiednich schematów umysłowych dotyczących tego, czym jest zadanie tekstowe, to jedno z najważniejszych zadań początkowego etapu szkolnej arytmetyki. Dziecko przychodzące do szkoły nie rozumie **specyficznej konwencji szkolnego zadania tekstowego**. Początkowo najważniejsza jest dla niego fabuła, podane liczby nie są ważne, gdy emocje dotyczące pozamatematycznych treści przesłaniają kwestie rachunkowe. Przykładowo: nauczyciel czyta zadanie o kwiatach, a dzieci – zamiast myśleć o podanych liczbach – opowiadają, jakie kwiaty najbardziej lubią.

Wielu uczniów klas 1–3 **nie ogarnia matematycznej struktury rozwiązywanego zadania**. Nieraz przy łatwym zadaniu z dwiema danymi liczbami dziecko na podstawie kontekstu szybko w obrębie dziesiątki znajduje trzecią liczbę, ale bywa, że nie jest przy tym świadome, **czego dotyczy pytanie i które liczby były przedtem dane, a która była szukaną niewiadomą**.

Jednakże pod wpływem niewłaściwego szkolnego nauczania sytuacja nieraz się odwraca: **uczniowie nadmiernie koncentrują się na liczbach**, nie zwracając uwagi na sytuację opisaną w zadaniu. Tutaj właśnie negatywną rolę może odegrać trudność (czy żmudność) samego procesu czytania – uczniowie ograniczają się do wzrokowego przeszukania tekstu w poszukiwaniu **cyfr**. Efektem tego nastawienia bywają bezsensowne próby **odgadnięcia działania**, które należy wykonać w danym zadaniu (często uczniowie np. sugerują się działaniami wykonywanymi poprzednio na tej samej stronie w podręczniku).

Nauczanie rozwiązywania zadań tekstowych jednodziałaniowych powinno – moim zdaniem – zaczynać się wcześnie, równolegle do wprowadzania samych działań arytmetycznych, i przechodzić przez kolejne etapy.

- Etap **sytuacji konkretnych** – wiele sytuacji, które tradycyjnie służą jako motywacja dodawania, można uznać za pewną wstępną formę zadania tekstowego (np. nauczyciel mówi o 3 kredkach i 2 kredkach, a potem pyta, ile jest ich razem), chociaż nie musi to jeszcze mieć układu późniejszych typowo szkolnych zadań.
- Etap **zadań półtekstowych**, tj. takich, w których jedna informacja liczbowa podana jest werbalnie (dziecko znajduje ją w czytanym lub wysłuchanym tekście), a drugą ma uczeń znaleźć przez **policzenie** odpowiednich elementów **na rysunku** (jest to ogniwo **pośrednie** między w pełni ukazanym konkretem a zadaniami czysto tekstowymi; ogniwo szczególnie ważne dla dzieci, które jeszcze dodają przez przeliczenie wszystkich elementów).
- Etap **zwykłych zadań** przedstawionych w postaci tekstu bez ilustracji (lub z ilustracją, na której nie da się znaleźć danych). Zadania te są czytane i objaśniane wpierw przez samego nauczyciela, później wspólnie z uczniami lub przez nich samodzielnie. Na tym etapie zadania powinny być początkowo rozwiązywane przez **symulowanie** na konkretach sytuacji zadaniowej, tj. za pomocą układania żetonów lub np. małych patyczków, będących „na niby” przedmiotami lub osobami wymienionymi w zadaniu.

Ocenianie tego, jak uczniowie rozwiązują zadania, powinno zależeć od etapu, na którym się znajdują. Nawet gdy w klasie rozwiązuje się już czysto słownie sformułowane zadania, pewnym uczniom należy pozwalać korzystać z różnych konkretnych podpórek przy przekładaniu tekstu zadania na zrozumiałą sytuację.

Behawiorystyczne podejście do zadań tekstowych polega na szukaniu w tekście tzw. **słów kluczowych** (ang. *key words*), które mają być dla ucznia wskazówką, jakie działanie ma wykonać. Gdy znajdzie słowo: *razem* lub *więcej*, jego „prawidłowym” odruchem będzie: mam znaleźć dwie liczby i je dodać; gdy w pytaniu są słowa: *ile zostało*, wie, że ma odjąć liczbę mniejszą od większej. Sposób ten działa zadowalająco w łatwych przypadkach, zwłaszcza tych, które nie wymagają operacyjności myślenia i odwrócenia działania.
W typowym jednak zadaniu na niewiadomy składnik mówi się, że ktoś coś *dostał*, a mimo to jednak trzeba odejmować. Na dłuższą metę system słów kluczowych jest **mało skuteczny**

**i szkodliwy**. Sposób ten nie działa też, gdy w czytanym tekście uczeń nie znajduje żadnego z wyuczonych słów. Wówczas dziecko może być **bezradne nawet przy łatwym zadaniu**.

Konstruktywistyczne podejście do zadań tekstowych jest zupełnie inne: uczeń ma sobie **wyobrazić sytuację** w opowiedzianej historyjce, pomyśleć, co się tam działo. To powinno nasunąć mu sposób rozwiązywania, tak jakby to była sytuacja życiowa. Ważne przy tym jest, by zadania były dla uczniów **sensowne z ich punktu widzenia**.

Ocenianie kształtujące powinno być nastawione na wspomaganie takiego właśnie myślenia ucznia. Należy **dostosować je do kolejnych etapów przechodzenia od konkretu do zadań czysto tekstowych**, nie wspartych konkretem. Nieraz nie wystarczy stwierdzić, że uczeń poprawnie napisał dodawanie, warto upewnić się w rozmowie, jak rozumie to, co napisał.

## 6. Niepowodzenia szkolne z matematyki

Niepowodzenia na różnych szczeblach edukacji matematycznej to głównie **wynik niewłaściwego nauczania**. Często też łączą się z **powierzchownym ocenianiem** i brakiem odpowiedniego przekazywania uczniowi informacji o jego postępach tak, by było to dla niego zrozumiałe i motywowało do aktywnego uczenia się.

Klasa 1 jest kluczowa dla całej późniejszej edukacji matematycznej, a dzieci w tym czasie są szczególnie wrażliwe. Wystawianie im wtedy ocen niedostatecznych za popełnione błędy powoduje strach przed szkołą i zniechęcenie do nauki (nie musi być użyte słowo „niedostateczny”, może być jakiś jego odpowiednik, mający taki sam sens dla ucznia). **Błędy dydaktyczne popełnione na początku szkoły są bardzo trudne do naprawienia** w starszych klasach, a cierpi na tym źle uczone dziecko, któremu jako usprawiedliwienie przyczepia się łatkę niezdolnego do matematyki. Niektórzy uczniowie rozwijają się wprawdzie wolniej, o kilka lub nawet kilkanaście miesięcy później niż średnia, ale odnosiliby sukcesy, gdyby nauczanie szkolne było do nich lepiej dostosowane, w szczególności gdyby mogli **wystarczająco długo rachować z pomocą konkretów**.

Wielką rolę w kwestii niepowodzeń szkolnych odgrywa to, czy dziecko jest **silne emocjonalnie**, czy też kruche. W szczególności dzieci z rodzin, w których ujawniły się poważne konflikty między rodzicami, są znacznie bardziej narażone na niepowodzenia z matematyki. Z tego powodu w klasie 1 oprócz kształtowania umiejętności matematycznych powinno się dążyć do **zwiększenia odporności emocjonalnej** dzieci w sytuacjach, które jawią im się jako trudne i wymagają wysiłku. Te kwestie były wnikliwie badane przez Gruszczyk--Kolczyńską.

W podstawie programowej z 2008 r. w części dotyczącej edukacji matematycznej znajdowało się zdanie: „uczeń kończący klasę 1 w sytuacjach trudnych i wymagających wysiłku intelektualnego zachowuje się rozumnie, dąży do wykonania zadania” (MEN, 2008, s. 25). Wprawdzie zapis ten MEN usunęło w 2014 r., ale nauczyciele nadal powinni kłaść nacisk na kształtowanie takiej postawy. Dużo też zależy od rodziców w okresie przedszkolnym (np. od tego, czy dziecko jest przyzwyczajane do pokonywania trudności takich jak wiązanie sznurowadeł).

Wszelkie nadmierne wymagania, którym uczeń nie jest w stanie podołać, uruchamiają mechanizmy obronne, ujawniające się jako np. ból głowy, płacz, odpisywanie od sąsiada. Dziecko **skupia się wtedy na swoim strachu**, nie słucha wyjaśnień nauczyciela, wyłącza się z uczenia się. Stopniowo narastają zaległości, które często są zbyt późno wykrywane przez nauczyciela lub rodziców, gdy wypracowane przez ucznia techniki obronne zawodzą. W miarę upływu czasu tendencja do **rezygnowania z góry** z prób rozwiązania zadania zaczyna również dotyczyć zadań łatwych, z którymi dziecko – gdyby uwierzyło we własne możliwości i było odpowiednio w tym wspomagane – dałoby sobie radę.

Kwestie emocjonalne powodują, że zwykłe sprawdziany organizowane dla całej klasy mogą nie diagnozować należycie dzieci. W pewnych przypadkach potrzebna jest też wnikliwa, wspierająca je rozmowa, z możliwością pomagania sobie konkretami.

## 7. Rozumienie pojęć i obliczeń przez dziecko

Bez należytego rozumienia wiedza matematyczna jest niewiele warta. Uczeń powinien rozumieć to, co oblicza, jednakże chodzi o **rozumienie odpowiadające jego poziomowi rozwojowemu**. Szczególnie ostrożnym trzeba być z wszelkim wyrokowaniem „rozumie – nie rozumie” w przypadku uczniów klas początkowych.

Można uznać, że uczeń wystarczająco rozumie dane pojęcie (na swoim poziomie wiekowym), jeśli poprawnie, z sensem, elastycznie myśląc, rozwiązuje związane z tym zadania. **Dzieci ujawniają swoje rozumienie w działaniu**. Warto je wprawdzie pytać: *Dlaczego tak sądzisz?*, jednakże często ich zasób słów i ogólne możliwości językowe są niewystarczające, aby odpowiedzieć. Dla dziecka np. to, że 4 + 8 = 8 + 4, może być oczywiste, choć nie umie ono wytłumaczyć, dlaczego tak sądzi i skąd to wie. Zdarzało się, że nauczyciele oczekiwali w takiej sytuacji odpowiedzi typu: „Zastosowałem prawo przemienności”, ale było to niewiele więcej niż wyuczona formułka.

Dziecko można skrzywdzić, przypisując mu pochopnie etykietkę „nie rozumie" na podstawie tego, że nie potrafi wyjaśnić swoich obliczeń lub własnego sposobu rozwiązywania zadania. **Należyte ocenienie, czy uczeń coś rozumie, wymaga wysokich kompetencji nauczyciela** i do tego cierpliwości.

To, co dorosły traktuje jako niezdolność dziecka do jakiegoś rozumowania, wynika nieraz z tego, że uczeń **nie rozumie intencji pytania**. Odpowiada poprawnie, logicznie, ale na **inne pytanie** – tak jak je zrozumiało. Pozornie może się wydawać, że skoro dziecko zna wszystkie użyte w poleceniu słowa, to zrozumienie pytania nie powinno stanowić trudności. Jednakże okazuje się, że to, w jaki sposób uczeń interpretuje usłyszany komunikat językowy i zadane mu pytanie, nie opiera się na językowej analizie znaczenia poszczególnych słów i konstrukcji gramatycznej zdania, lecz odbywa się to **pod przemożnym wpływem kontekstu**, na tle ogólnej sytuacji, w której pytanie jest zadawane. Dlatego tak ważne jest, by matematyczne zadania w klasie 1, zwłaszcza wtedy, gdy dotyczą nowego dla uczniów zagadnienia, były początkowo w naturalny sposób wplecione w bliskie, dobrze znane dziecku sytuacje.

Liczne przykłady pokazują, że **zmiana kontekstu zasadniczo wpływa na rozumienie** przez dziecko stawianego mu **zadania matematycznego**. Nie tylko więc wprowadzanie nowego tematu powinno opierać się na czynnościach wykonywanych przez dzieci w sensownych dla nich sytuacjach. Należy też **brać pod uwagę rolę kontekstu zadania przy ocenianiu ucznia** – czy kiepski wynik nie ma swego pozamatematycznego źródła w niezbyt zrozumiałej sytuacji zadaniowej.

Bardzo ważne jest należyte dobieranie zadań na sprawdziany i sposób ich przedstawiania. Zbyt abstrakcyjne polecenia mogą być nadmiernie trudne dla uczniów, którzy daliby radę rozwiązać zadanie, gdyby było sformułowane w bardziej odpowiedni dla nich sposób. Zdarza się, że **po dokonaniu niewielkiej zmiany** – dla dorosłego nieistotnej – **staje się ono dla ucznia zbyt trudne**. Odwrotnie – zadanie zbyt trudne może stać się wykonalne, gdy uczeń może wspomóc się konkretem lub gdy konkret w zadaniu jest zmieniony na inny, trafniej dobrany.

Ponadto zdarza się, że uczeń byłby w stanie rozwiązać jakieś zadanie, **gdyby polecenie było w nim rozbite na wyraźne pojedyncze kroki**. Jeśli jednak ma przeczytać całe polecenie jednym ciągiem (lub słucha je tak przeczytane), to samo zadanie staje się znacznie trudniejsze. Zaobserwowałem w zeszytach i na sprawdzianach zjawisko, które nazwałem **pułapką ogólnych poleceń**. Otóż uczeń dostaje nieraz na lekcji lub na sprawdzianie zwięzłe, jednozdaniowe polecenie, **obejmujące kilka przypadków szczególnych**. Może to być kilka obliczeń lub kilka obrazków o podobnym schemacie, ale różniących się np. liczbami, kolorami, kształtami figur. Objęcie wszystkich tych przypadków jednym zdaniem w poleceniu dla ucznia często skutkuje zbyt trudnymi konstrukcjami językowymi.

Typowy przykład. Polecenie brzmi niewinnie: *Pokoloruj jednakowo figury o jednakowym kształcie.* Słowa „jednakowy kształt” należy tu rozumieć jako „figury podobne w sensie geometrii klas starszych”. Wydaje się to proste. Uczeń musi jednak wykonać **wiele operacji umysłowych**:

a) zrozumieć sens zwrotu: „pokoloruj jednakowo” to znaczy „na ten sam kolor”,
b) rozpoznać poszczególne figury i stwierdzić, które z nich mają jednakowy kształt,
c) wybrać jeden z tych kształtów,
d) wybrać jakiś kolor,
e) po pokolorowaniu wybranych na początku figur podobnie postąpić z pozostałymi.

Otóż to samo zadanie byłoby istotnie łatwiejsze, gdyby zamiast polecenia ogólnego dać polecenie cząstkowe: *Znajdź koła na rysunku i pokoloruj je na czerwono*. Potem dopiero pojawiałoby uogólnienie tego na pozostałe przypadki. Oczywiście to zajmuje miejsce, długi tekst w podręczniku źle wygląda, więc nieraz oszczędza się na liczbie słów w sformułowaniu.

Przeanalizujmy inne typowe polecenie ze sprawdzianu: *Odczytaj cyfry zapisane przy pustych pętlach. Dorysuj w każdej tyle elementów, ile wskazują zapisane przy nich liczby*. Otóż wbrew pozorom nie będzie to po prostu sprawdzenie, czy uczeń zna zapis cyfr i czy umie dorysować brakujące elementy. Zadanie takie będzie raczej sprawdzać, **czy uczeń potrafi pojąć tak sformułowaną konstrukcję językową**, a więc czy ma zupełnie inną kompetencję niż była zamierzona w intencji układającego takie zadanie.

## 8. Różnorodność rozwiązań i obliczeń

Zadania tekstowe dawane w szkole z reguły mają jedną poprawną odpowiedź (wyjątkami są zadania celowo źle sformułowane bądź mające wiele możliwych poprawnych odpowiedzi). Badania prowadzone w różnych krajach potwierdziły dawniejsze spostrzeżenia nauczycieli, że spora część uczniów (na różnych szczeblach edukacyjnych) ma wdrukowane **fałszywe mniemanie, że każde zadanie matematyczne** (z podręcznika lub podane przez nauczyciela na lekcji) **ma jedno i tylko jedno rozwiązanie**. Chodzi tu nie tylko o jedyną poprawną odpowiedź, lecz także jedyny tylko sposób rozwiązywania, jedyną poprawną drogę wiodącą do odpowiedzi. Ponadto uczniowie są przekonani, że koniecznie muszą przy tym być wykonane jakieś działania arytmetyczne na wszystkich liczbach podanych w zadaniu. Jest to wynik silnie zakorzenionego w tradycji szkolnej sposobu organizacji lekcji matematyki, w którym nauczyciel podaje przykładowe zadanie, objaśnia, jak należy je rozwiązać, po czym daje serię podobnych zadań. Uczeń ma dalej w ten sam sposób postępować z następnymi, analogicznie sformułowanymi zadaniami. Zdarza się też nieraz (zwłaszcza w klasach 1–3), że **nauczyciel nie akceptuje poprawnego rozwiązania ucznia**, nie próbuje nawet w nie wniknąć, domaga się, by uczniowie **ściśle stosowali się do podanego im schematu**.

Ważne jest, by uczniowie byli świadomi tego, że pewne zadania można rozwiązywać **różnymi sposobami**, wiele obliczeń też można rozmaicie wykonywać. Co więcej, różnorodność jest cenna, gdyż odzwierciedla **elastyczność rozumowania** dziecka, rozwija jego nastawienie do poszukiwania różnych rozwiązań, nietrzymania się jednego szablonu.

Nie należy jednak przechodzić z jednej skrajności w drugą. Nie należy zarówno domagać się, by uczniowie stale stosowali jeden ściśle określony sposób rozwiązywania zadań danego typu, jak i zachęcać ich do powtórnego rozwiązania zadania w inny sposób. Dla małego ucznia takie postawienie sprawy jest na ogół niezrozumiałe. Zadanie rozwiązujemy, bo chcemy znaleźć odpowiedź na postawione pytanie. **Skoro znamy odpowiedź, po co mielibyśmy rozwiązywać zadanie po raz drugi?**

Naturalne dla ucznia jest inne podejście: nauczyciel mówi, że jakaś Kasia rozwiązała zadanie tak, a Jaś inaczej; czyje rozwiązanie jest dobre? Jest to punkt wyjścia sensownej wymiany opinii. Uczeń powinien wiedzieć, że ma prawo wykonać obliczenie lub rozwiązywać zadanie tekstowe na swój sposób, inaczej niż kolega, a nawet inaczej niż zapisano w podręczniku i inaczej niż pokazał nauczyciel, byle to było poprawne!

Podobne uwagi dotyczą wykonywania obliczeń. Dodawanie liczb dwucyfrowych, np. 38 + 45, można wykonać rozmaicie. Można dodać osobno dziesiątki 30 + 40 i osobno jedności 8 + 5, a potem dodać 70 + 13. Można najpierw do 38 dodać 40, a potem do 78 dodać 5. Można też najpierw dodać 30 do 45, a potem do sumy 75 dodać 8. Oczywiście zasadniczą trudnością we wszystkich tych przykładach jest konieczność przekraczania progu dziesiątkowego, bowiem 8 + 5 to więcej niż 10. Obliczenia te w naturalny sposób wykonuje się na **zabawowych pieniądzach**. Jeszcze więcej możliwych strategii mamy przy odejmowaniu, np. 63 – 47. W takich sytuacjach dobrze jest myśleć odejmowaniu jako zabieraniu, a o liczbie 47 myśleć jako o „40 i 7” (to bywa sugestywniejsze niż myślenie o „40 plus 7”, bowiem plus staje się tu minusem przy odejmowaniu; słowo „i” bardziej sugeruje uczniowi, że odejmuje się oba składniki, zarówno 40, jak i 7).

Na sprawdzianie obliczenia mające ocenić stopień opanowania tego typu działań można uczniom **różnicować**. Niektórym uczniom odejmowanie można dać w formie czysto symbolicznej, innym zaś to samo odejmowanie dać w postaci bardziej poglądowej, jako np. obliczenie pieniężne, bądź umożliwić korzystanie z liczydełek. Ważne jest, by **każdy uczeń odniósł sukces na swoim poziomie**.

## 9. Matematyka widziana jako system nakazów i zakazów

Wiele trudności uczniów bierze się stąd, że ujmują matematykę jako pewien niezrozumiały dla nich system nakazów i zakazów, które trzeba zapamiętać i ściśle się do nich stosować. W takich przypadkach trudno nieraz wyjaśnić dzieciom nawet pewne oczywiste kwestie. Oto przykład pozornie jasnej reguły: najpierw wykonuje się działania w nawiasach. Otóż zdarzało się, że studentka edukacji początkowej miała ocenić poprawność obliczenia:

$8 \cdot 7 = (3 + 5) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 21 + 35 = 56.$

Jest to znany, kiedyś powszechnie stosowany w szkole sposób obliczania iloczynów z czwartej ćwiartki tabliczki mnożenia poprzez sprowadzenie ich do (wcześniej poznanych przez uczniów) iloczynów z drugiej i trzeciej ćwiartki. Dziś wiadomo, że takie rozumowanie jest dla uczniów trudne i sztuczne (w wykładzie o konstruktywizmie wspomniałem, jak takie obliczenia może dziecko samo, ze zrozumieniem wykonać na konkretach, układając 8 kartoników z 7 elementami na każdym).

Studentka stwierdziła, że to obliczenie jest błędne, bo przecież uczyła się, że najpierw trzeba zawsze wykonać obliczenie w nawiasie i wobec tego należało napisać:

$8 \cdot 7 = (3 + 5) \cdot 7 = 8 \cdot 7.$

W ten sposób wraca się do punktu wyjścia! Trudno jej było pojąć, że ta ogólna reguła wcale nie nakazuje, by zawsze, zobaczywszy nawias, należało zaraz zabierać się za obliczanie umieszczonego tam działania.

Inne zaś studentki uważały, że np. obliczenie $38 + 47 – 28 = 10 + 47 = 56$ jest niepoprawne, bo należy przecież wykonywać działania od lewej do prawej, a więc najpierw trzeba dodać $38 + 47 = 85$, a dopiero potem od 85 należy odjąć 28. A przecież wystarczyło pomyśleć o tym zadaniu praktycznie, na przykładzie pieniędzy, np. mam w dwóch kopertach 38 zł i 47 zł, a płacę 28 zł. 28 zł mogę wziąć z koperty, w której jest 38 zł, nie muszę obliczać, ile mam w obu kopertach razem. Niestety **złe szkolne nawyki myślowe, że zawsze trzeba stosować jakieś reguły**, są trudne do przezwyciężenia.

Trudności studentek biorą się z tego, że gdy same chodziły do szkoły podstawowej, były niewłaściwie nauczane. Efektem tego stało się **trwale wdrukowane przekonanie**, że każde zadanie można rozwiązać w jeden tylko sposób, który nauczyciel podaje jako wzór; że **samemu nic się nie wymyśli**, a arytmetyka jest niezrozumiałym systemem nakazów i zakazów, do których trzeba się skrupulatnie stosować.

Jedna zasada powinna być zawsze aktualna: **najpierw myśl, potem obliczaj**.

## 10. Automatyzacja obliczeń

Wiedza matematyczna przekazywana w gotowej postaci do wyćwiczenia, zapamiętania i odtwarzania staje się **wiedzą werbalną** (czysto słowną, często bezmyślną) lub **proceduralną** (tzn. uczeń stosuje wyuczone procedury, nieraz czysto mechanicznie). Nie jest osadzona w ogólnych strukturach poznawczych ucznia. Jeśli pamięć go zawiedzie lub reguła mu się pomyli, nie ma szansy na samodzielne odtworzenie lub sprawdzenie danego fragmentu. Wiedza taka **nie jest** też **powiązana z realnym światem dziecka**, przez to jest dla niego pusta, pozbawiona sensu, nie chce się ono tego uczyć, działa pod przymusem.

Alina Szemińska (1981) pisała: „Wiele badań psychologicznych wskazuje na to, że wielokrotne powtarzanie tej samej czynności prowadzi do jej automatycznego wykonywania, co **utrudnia** jej myślowe ujęcie. Im wcześniej jakaś czynność jest zautomatyzowana, tym mniej w niej bierze udział świadomość. Badania dotyczące niepowodzeń w nauczaniu matematyki wskazują, że zasadniczą przyczyną, zwłaszcza w klasach początkowych, było zastępowanie rozumienia przez mechaniczne wykonywanie zapamiętanych schematów postępowania”.

Jak pisał Hans Aebli, przy nauczaniu tradycyjnym, opartym na podawaniu wiedzy bez należytej aktywności uczniów, gdy uczniowie nie rozumieją związków arytmetycznych między liczbami, nauczyciel zmuszony jest do ćwiczenia tego przez powtarzanie schematów. Nie prowadzi to do operacyjnego rozumienia materiału, lecz do **wytworzenia pewnych nawyków**, automatyzmów, nieskutecznych na dłuższą metę.

Rozpowszechnione jest mniemanie, że automatyzacja rachunków szkolnych jest korzystna, świadczy o dobrym opanowaniu arytmetyki. Otóż jest korzystna jedynie wtedy, gdy:

- jest ukoronowaniem długiego okresu kształtowania pojęć, coraz lepszego rozumienia obliczeń i coraz większej wprawy rachunkowej;

- uczeń w każdym momencie potrafi uwolnić się od automatyzmu i przejść na poziom świadomego wykonywania obliczeń i myślenia o ich sensie.

Niestety dość często szkoła dąży do tego, by uczniowie możliwie wcześnie zautomatyzowali swe obliczenia. Wymusza się to przez **ocenianie nastawione na rachunki utrwalające** podane schematy, na ich tempo i poprawność, bez dostatecznie długiego, niezbędnego etapu dojrzewania techniki rachunkowej, opartej na **wnikaniu w sens** prowadzonych obliczeń. Dobre, solidne rozumienie obliczeń najlepiej osiągać przez samodzielne próby uczniów na wczesnych etapach opanowywania rachunków.

Kwestia ta dotyczy całego nauczania matematyki w szkole. Samodzielnych prób dochodzenia do wyniku, które są najbardziej kształcące, możemy spodziewać się jedynie wtedy, gdy uczeń nie poznał jeszcze ogólnej, skutecznej reguły postępowania. Dlatego **przedwczesne podawanie uczniom reguł jest szkodliwe**.

**Szkodliwy wpływ** nadmiernie podającego nauczania, nastawionego na opanowanie techniki rachunkowej, **nie ujawnia się od razu**. Uczniowie zapamiętują wyniki dodawania i odejmowania w zakresie 20, opanowują tabliczkę mnożenia, poprawnie wykonują szablonowe obliczenia. Negatywne efekty ujawniają się przy zadaniach złożonych i przy kwestiach wymagających wyjścia poza wyćwiczone schematy. Trudności kumulują się stopniowo później i bardzo trudno wtedy o zmianę wieloletnich przyzwyczajeń, o odejście od utrwalonego nastawienia ucznia, który z wyuczoną bezradnością stale pyta „Jak mam to zrobić?” bez próby nawet wniknięcia w sens tego, co ma być zrobione. Niektórzy z tych uczniów po latach zostają nauczycielami i przekazują niedobre, utrwalone schematy myślenia i postępowania następnym uczniom.

## 11. Cele operacyjne

W polskiej szkole obecnie silnie zakorzeniła się tendencja do ujmowania nauczania w kategoriach wyników końcowych, z **zaniedbaniem myślenia o kształceniu jako o procesie**. Uwidacznia się to m.in. w sposobie konstruowania rozmaitych testów sprawdzających umiejętności uczniów klas 1–3.

Powszechnie praktykowane jest obecnie formułowanie **celów operacyjnych**, czyli celów szczegółowych, określających **zamierzone efekty** nauczania i wskazujące zarazem wyraźnie, w jaki sposób będzie się stwierdzało, czy dany uczeń ten cel osiągnął. Takie cele, jeśli odnoszą się do jakiegoś dłuższego okresu kształcenia, mogą mieć sens, ale gdy są formułowane dla każdego dnia nauczania jako efekty do osiągnięcia na danej lekcji, robią wrażenie pustego rytuału.

Metodycy drobiazgowo nieraz wypisują, którym punktom podstawy programowej odpowiada temat danej lekcji. Moim zdaniem nie ma to większego sensu, rzuca się zresztą w oczy sztuczność wielu tych przyporządkowań. Podstawa programowa jako najważniejsze zadanie szkoły podaje **wspomaganie rozwoju dziecka**, w tym rozwoju intelektualnego i emocjonalnego. Oczywiste jest, że **nie da się dokładnie opisać oczekiwanych matematycznych umiejętności, wiedzy i postaw uczniów**. Z tego powodu wymienione w podstawie umiejętności należy traktować jako **orientacyjne drogowskazy** dla nauczyciela (dotyczące uczniów o przeciętnych możliwościach). Niestety podstawa programowa bywa traktowana jako wykaz umiejętności do wyćwiczenia i późniejszego testowania.

Przykładem dobrze sformułowanego celu operacyjnego jest pamięciowe opanowanie **tabliczki mnożenia**. Zapamiętanie iloczynów liczb jednocyfrowych powinno być zakończeniem, ukoronowaniem pewnego – trwającego około dwóch lat – procesu kształtowania w umyśle ucznia wielu pojęć związanych z mnożeniem, umiejętności obliczania tych iloczynów z pomocą konkretów i bez nich, wiązania jednych faktów liczbowych z innymi, budowania trwałej podbudowy pod dalsze kształcenie.

Ważne i często zadawane jest pytanie: **Do kiedy uczeń musi pamięciowo opanować całą tabliczkę mnożenia?** Otóż dobre jej opanowanie staje się niezbędne przy bardziej zaawansowanych obliczeniach, w szczególności przy mnożeniu liczb wielocyfrowych i przy działaniach na ułamkach – jedne i drugie są dopiero w klasach 4–6. Zgodne z tym są zapisy w podstawach programowych z lat 2008 i 2014; w programie obowiązującym do roku 1999 opanowania całej tabliczki wymagano na półrocze klasy 3.

Oczywiście dzieci zapamiętują pewne iloczyny dość szybko, zwłaszcza te w zakresie 20. Kuszące dla nauczyciela jest dążenie do przyspieszenia tego procesu poprzez ćwiczenia pamięciowe i sprawdziany. Może to być jednak sukces pozorny, chwilowy. Długofalowo odbije się na uczniach w klasach 4–6, jeśli nacisk na szybkie zapamiętanie odbył się kosztem należytego rozumienia mnożenia. Gdy zadania staną się trudniejsze, samo recytowanie tabliczki nic nie pomoże.

Behawiorystyczne planowanie w skali mikro dotyczy pojedynczych lekcji. W wielu klasach nauczyciel idzie na lekcję ze scenariuszem, w którym z góry rozpisane są jego nie tylko czynności, ale nawet reakcje dzieci! Często zdarza się, że **sposób rozumowania uczniów,**

**choć poprawny i naturalny, okazuje się inny, niż zostało to zaplanowane**, ale nauczyciel mimo to nie odstępuje od scenariusza i nie dostosowuje się do sposobu myślenia dzieci. Wymusza się w ten sposób, by to one dostosowywały swe myślenie do obcego im nieraz i niezrozumiałego sposobu wymyślonego przez dorosłego, i lekceważy przejawy ich samodzielnego myślenia. W ten sposób marnuje się ich potencjał, a szkoła może usprawiedliwiać się potem brakiem zdolności dzieci do matematyki.

Błędem jest również przyjmowanie z góry – w zapisanych celach operacyjnych – że na danej lekcji jakaś umiejętność będzie przez uczniów opanowana, i następnie negatywne ocenianie ich pod koniec lekcji, jeśli tego celu nie udało się osiągnąć.

Przy zasadach postępowania stosowanych obecnie w wielu szkołach nauczyciel klasy 1 jest zobowiązany przygotować **plan wynikowy** – zanim pozna swoich uczniów i rozezna się w ich możliwościach i potrzebach. Taki plan jest z konieczności robiony w ciemno, a potem nieraz trzeba trzymać się tego, co zostało napisane. Gdyby priorytetem nauczania był uczeń, a nie rozkład materiału, brano by pod uwagę to, **uczniowie mogą mieć z jakimś tematem znacznie większe trudności** niż planowano i konieczne może być dołożenia im kilku lekcji, by mogli opanować materiał w stopniu wystarczającym do opierania na tym dalszych tematów. W matematyce **zbyt pośpieszna realizacja** jednego działu może niekorzystnie odbić się później w postaci nadmiernych trudności z bardziej zaawansowanym materiałem.

## 12. Znak „mniejszy”, znak „większy”

Chodzi tu o rozpoznawanie i pisanie znaków **porównywania liczb** przez uczniów klasy 1. Dawniej dzieci uczyły się pisać znaki „mniejszy” < i „większy” > dopiero w starszych klasach szkoły podstawowej. W roku 1976, w czasie ówczesnych reform, przeniesiono je do klasy zerowej. Po latach z tego zrezygnowano, w podstawie programowej z 2008 r. nie było już takiego wymagania po klasie 1, jakkolwiek siłą bezwładności znaki te zostały w podręcznikach. Pojawiały się nieraz bardzo wcześnie, gdy uczeń poznał dopiero zapis kilku liczb.

Znaki „mniejszy” <, „większy” > wydają się łatwe. Z pewnością nie są trudne do napisania. Należałoby natomiast zapytać: W jakim celu miałyby te znaki być wprowadzane, gdy uczeń zajmuje się tylko liczbami do 10? Czy tak wczesne zapamiętanie tych znaków przyczyni się do lepszego rozumienia arytmetyki? **Otóż jest to do niczego niepotrzebne**, a jedynie obciąża pamięć uczniów. Każde dziecko wie, że cztery to mniej niż siedem, a pięć to więcej niż dwa. Niepotrzebny jest mu do tego żaden nowy, kłopotliwy do zapamiętania znak. Nauczyciele używają różnych sztuczek mających pomóc uczniowi przypomnieć sobie, w którą stronę pisze się znak „mniejszy” <, a w którą znak „większy” >. Dla kształtowania podstawowych pojęć i umiejętności arytmetycznych niewiele jednak wynika z tego zapamiętania.

W okresie reform na fali tzw. nowej matematyki sprzed 40 lat uważano, że należy wprowadzać razem trójkę znaków: „mniejszy” <, „większy” >, „równa się” = na przykładach typu 2 < 7, 6 > 5, 3 = 3. Było to przeniesienie akademickiego myślenia do edukacji początkowej. Zapisy 4 = 4, 1 = 1 itp. znaczą „4 to 4”, „1 to 1”. Jest to dość jałowa matematyka, coś jakby „masło to masło”. Wbrew dawnym opiniom, takie użycie znaku równości **nie jest trafnym wprowadzeniem do zapisów typu 3 + 2 = 5**, który na poziomie algebry znaczy: liczba 3 + 2 i liczba 5 to ta sama liczba. Niestety, z badań naukowych wynika, że **uczeń klasy 1 nie potrafi myśleć o 3 + 2 jako o symbolu pewnej liczby**. Symbol 3 + 2 ma dla dziecka zupełnie inne znaczenie, to polecenie: *mam dodać liczby 3 i 2, a potem po znaku „równa się” wpisać wynik*.

Oczywistą konsekwencją wprowadzenia znaków „mniejszy” <, „większy” > na lekcji jest to, że potem znaki te **pojawiają się na sprawdzianach**. Co to daje? Część dzieci myli się przy ich wpisywaniu, choć bardzo chcą wszystko dobrze zrobić. Czy jeśli uczeń wpisze na sprawdzianie np. 2 > 6, możemy sądzić, że myśli, że 2 jest większe od 6 lub że nie zna cyfr? Taki wniosek byłby bardzo mało prawdopodobny: po prostu uczeń odtworzył w swej pamięci niewłaściwy znak. W sumie korzyści dydaktyczne z wczesnego wprowadzenia tych znaków są niewielkie, a straty po stronie dzieci – wyraźne.

Wpisywanie znaków „mniejszy” <, „większy” > powinno być połączone z jakąś rzeczywistą trudnością matematyczną dla dziecka. Uczenie stosowania tych znaków ma więc sens najwcześniej wtedy, gdy poznaje się liczby do 100, np. gdy trzeba zapisać, co jest większe: 47 czy 74.

Dość popularne w zeszytach ćwiczeń dla klasy 1 były polecenia typu; *Wykonaj obliczenia. Porównaj wyniki i wstaw w okienko odpowiedni znak*: >, <, =. Uczeń widział napisy takie jak:

7 – 2 □ 3 + 1.

Pozornie jest to łatwe. Przecież odjęcie 7 – 2 = 5 i dodanie 3 + 1 = 4 to bardzo łatwe działania. Porównanie wyników 5 i 4 też nie jest trudne. Pomyślmy jednak o tym samym inaczej: **Jakie operacje umysłowe ma tu wykonać uczeń?** Otóż ma ogarnąć strukturę tego zadania, a następnie: 1. obliczyć w myśli sumę znajdującą się na lewo od okienka, 2. obliczyć różnicę po prawej stronie, 3. dokonać operacji porównania liczb otrzymanych w dwóch poprzednich krokach i wpisać odpowiedni znak. Musi więc wykonać w myśli trzy operacje:

7 – 2 = 5, 3 + 1 = 4, 5 > 4

Normalnie na jego poziomie należałoby dać uczniowi te działania do wykonania **po kolei** i do zapisania w trzech kolejnych linijkach.

Według zwykłych kryteriów dydaktycznych można ocenić zadanie 7 – 2 □ 3 + 1 jako zadanie złożone, a nawet coś trudniejszego: zadanie złożone do rozwiązania w jednym zapisie. Jeżeli takie zadanie pojawi się już w klasie 1, to powinno być traktowane jako zadanie trudne, nieobowiązkowe, jednak zazwyczaj nie jest specjalnie oznakowane, a więc odbierane jako zadanie dla wszystkich, w domyśle: wymagane.

Każda z trzech powyższych operacji umysłowych jest łatwa. Jednakże istotną trudnością dla dziecka na początku szkolnej edukacji matematycznej jest **ogarnięcie struktury całości zadania i rozbicie go na ciąg prostych czynności**. Uczniowi mogłaby istotnie pomóc wskazówka nauczyciela typu: nad każdym działaniem napisz maleńką cyferką jego wynik. Nad symbolem 7 – 2 uczeń napisałby 5, nad 3 + 1 napisałby 4. Wtedy mógłby pojąć, że pozostało mu tylko zadanie: 5 □ 4. Wpisanie znaku „większy” > byłoby już proste.

W jednym z dawnych podręczników było napisane: **kto ma wprawę, nie potrzebuje pisać takich małych cyferek**. Jest to dobre postawienie sprawy: uczeń ma prawo skorzystać z takiej podpórki, potem może sobie wyobrażać te cyferki, a jeśli potrafi wykonać zadanie na wyższym poziomie, nie należy go zmuszać do zapisywania ich.

## 13. Czy matematykę mogą opanować tylko specjalnie uzdolnieni uczniowie?

Myślenie dzieci w okresie wczesnoszkolnym jest istotnie różne od myślenia dzieci starszych i trzeba to uwzględniać w nauczaniu. Widać to wyraźnie nie tylko na testach takich jak stałość liczby, lecz także – w szczególności – w potrzebie wykorzystywania konkretów przy obliczeniach. Dzieci młodsze potrzebują też odczuwać życiowy sens dawanych im zadań. **Nie jest natomiast prawdą, że matematyka dostępna jest jedynie dla specjalnie uzdolnionych uczniów**.

Piaget pisał, że każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, **jeśli zadanie wynika z konkretnej sytuacji i wiąże się z jego zainteresowaniami**, gdy odwołamy się do jego aktywności i gdy uda się nam usunąć zahamowania emocjonalne. Uczniowie uznani za zdolnych to często ci, którzy **potrafią przystosować się do podającego sposobu nauczania**, do zbyt abstrakcyjnych sformułowań i do zbyt wczesnego przejścia na poziom symbolicznego zapisu.

Gruszczyk-Kolczyńska, na podstawie swych pionierskich badań, doszła do wniosku, że **połowa dzieci manifestuje swoje uzdolnienia matematyczne**, jeśli długofalowo stworzy się im odpowiednie warunki w przedszkolu i potem szkole. Ujawnia się to wyraźnie w wieku przedszkolnym, natomiast później, pod wpływem typowego nauczania w systemie klasowo-lekcyjnym, odsetek dzieci ujawniających zdolności matematyczne wyraźnie maleje.

Nauczanie szkolne **równa wybitnie uzdolnione dzieci do średniego poziomu**. Sprawdziany są często nastawione na umiejętności wyćwiczone. Nietypowe, oryginalne myślenie często jest niezauważane, lekceważone. Uczniowie zadający wiele pytań przeszkadzają w prowadzeniu lekcji (zwłaszcza gdy nauczyciel chce ją realizować zgodnie z przyjętym wcześniej scenariuszem). Rozwiązanie zadania w sposób inny niż to przewiduje standardowa metodyka bywa nieakceptowane, nawet gdy jest poprawne. Dzieci szybko uczą się, że w szkole nie opłaca się być twórczym i oryginalnym, że najlepiej jest siedzieć cicho i pilnie robić tylko to, co zostało nakazane. W tych warunkach uczniowie uzdolnieni często nudzą się i przeszkadzają innym, przechwalają się swoją wiedzą, nieraz stwarzają problemy wychowawcze.

## Bibliografia

Aebli H., (1982), *Dydaktyka psychologiczna*, wyd. 2, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Choroszczyńska M., Dotka M., Konopka I., Zwierzyńska E., (2015), *Ocenianie w klasach 1–3*, Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji [online, dostęp dn. 21.01.2016].

Donaldson M., (1986), *Myślenie dzieci*, Warszawa: Wiedza Powszechna.

Gruszczyk-Kolczyńska E., (1994), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, wyd. 2, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.), (2012), *O dzieciach uzdolnionych matematycznie. Książka dla rodziców i nauczycieli*, Warszawa: Nowa Era.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., (2013), *Nauczycielska diagnoza edukacji matematycznej dzieci*, Warszawa: Nowa Era.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska, E., (2015), *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Kraków: Bliżej Przedszkola.

Gruszczyk-Kolczyńska E. i in., (2009), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*, Warszawa: Edukacja Polska.

Klus-Stańska D., Nowicka M., (2009), *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Ministerstwo Edukacji Narodowej, (2008), *Podstawa programowa z komentarzami. Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i technikum (matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka)*, Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Piaget J., (1977a), *Dokąd zmierza edukacja,* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Piaget J., (1977b), *Psychologia i epistemologia,* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

*Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dn. 10 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy w szkołach publicznych* (Dz.U. z 2015 r. poz. 843).

Semadeni Z., (2015), *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*, [w:] Semadeni Z. i in., *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna*, Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, s. 9–170.

Szemińska A., (1981), *Rozwój pojęć matematycznych u dziecka*, [w:] Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, wyd. 1 (wyd. 2: 1991), Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, rozdz. 2.1–2.5.