

Zbigniew Semadeni

Podejście
konstruktywistyczne
do matematycznej
edukacji
wczesnoszkolnej



Redaktor prowadzący
Agnieszka Brodowska

Redakcja językowa i korekta
Katarzyna Gańko

Opracowanie graficzne, projekt okładki i skład
Barbara Jechalska
(z wykorzystaniem motywu zaprojektowanego
przez Studio Kreatywne Małgorzaty Barskiej)

Zdjęcie na okładce: blueringmedia/Fotolia.com

Rysunki
Barbara Jechalska (s. 12–14, 23–25, 27–28)
Elżbieta Śmietanka-Combik (s. 26, 29)

© Copyright by Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2016

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl
tel. 22 345 37 00
fax 22 345 37 70

Spis treści

1. Co rozumiemy przez konstruktywizm w procesie kształcenia?	4
2. Na czym polega realizacja konstruktywistycznych zaleceń?	5
3. Respektowanie poczucia sensu u dziecka i jego wiedzy osobistej	7
4. Konflikty poznawcze i rola manipulowania konkretnymi	11
5. Znaczenie operacyjności myślenia dla sukcesu w uczeniu się arytmetyki.....	15
6. Zeszyty ćwiczeń	17
7. Behawiorystyczne podejście do edukacji matematycznej.....	19
8. Prawo ucznia do błędów	20
9. Zapis symboliczny.....	21
10. Konstruktywistyczne podejście do początków mnożenia.....	25
11. Tabliczka mnożenia	28
12. Czy kwadrat jest prostokątem?.....	30
13. Podsumowanie	31
Bibliografia.....	33

1. Co rozumiemy przez konstruktywizm w procesie kształcenia?

Termin **konstruktywizm** jest używany w wielu dziedzinach humanistyki (filozofii, psychologii, socjologii, pedagogice) i sztuki (malarstwie, architekturze) w różnorodnych sensach. Nas interesuje konstruktywizm w teorii poznania – dotyczącej źródeł wiedzy ludzkiej – zastosowany w kontekście kształcenia, szeroko rozumianego jako zdobywanie przez dziecko doświadczeń i wiedzy, rozwijanie umiejętności oraz coraz lepsze rozumienie otaczającego nas świata. Kształcenie obejmuje zarówno przedszkolny i szkolny proces nauczania–uczenia się, jak i wszelkie nieformalne uczenie się, zbieranie doświadczeń w codziennych kontaktach dziecka: rodzinnych, z rówieśnikami, z innymi dorosłymi.

Przedmiotem tego wykładu jest konstruktywistyczna teoria i praktyka uczenia się w ramach edukacji matematycznej pod koniec przedszkola i w klasach 1–3, oparta na badaniach naukowych prowadzonych przez licznych wybitnych psychologów, pedagogów i dydaktyków matematyki w ciągu ostatnich stu lat. Szczególnie należy podkreślić tu rolę, jaką odegrali: Jean Piaget (1896–1980), Lew Wygotski (1896–1934), Pierre van Hiele (1909–2010), Margaret Donaldson (Edynburg), Eddie Gray i David Tall (Warwick, Anglia) oraz Milan Hejny (Praga).

Znaczący wkład w omawianą dziedzinę wniosły też dwie badaczki z Polski: Alina Szemińska (1907–1986), współautorka fundamentalnych dzieł Piageta o rozwoju pojęcia liczby i pojęć geometrycznych u dziecka, oraz Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, profesor Akademii Pedagogiki Specjalnej w Warszawie, autorka wielu ważnych książek o dziecięcych sposobach uczenia się matematyki i o trudnościach, jakie mogą mieć uczniowie.

Konstruktywizm pedagogiczny bywa rozmaicie określany i opisywany. Tu będziemy tym terminem nazywać **konstruktywistyczne podejście do procesu kształcenia**. Oto podstawowe założenia tak rozumianego konstruktywizmu:

- wiedza dziecka powstaje w wyniku jego aktywnego działania, jest konstruowana w jego umyśle;
- zdobywanie wiedzy to proces, który odbywa się w interakcji ze środowiskiem edukacyjnym;
- nauczyciel nie może przekazać dziecku pojęć matematycznych poprzez samo ich objaśnianie, nawet klarowne i bardzo dokładne, nawet gdy ilustruje je na konkretnych przykładach;

- wbrew obiegowym opiniom efektywne nauczanie nie polega na tym, że nauczyciel podaje gotową wiedzę, a dziecko ma się tego nauczyć, zapamiętać i potem odtwarzać;
- w możliwie dużym stopniu wiedza powinna być odkrywana przez uczące się dziecko;
- wiedza to nie tylko fakty i informacje, to także umiejętność wykorzystania ich w praktyce.

Konstruktywizm kładzie nacisk na proces, a nie efekt kształcenia. Podkreśla się, że w procesie nauczania trzeba wykorzystywać pozaszkolną wiedzę dziecka. Kluczową zaś tezą jest **niemożność przekazania wiedzy matematycznej** poprzez najlepsze nawet pokazy i słowne objaśnienia. Dziecko wprawdzie może wiedzieć, co mu się pokazuje, może znać wszystkie użyte przez dorosłego słowa, ale jeżeli nie ma odpowiednich wcześniejszych doświadczeń i jego rozwój umysłowy nie osiągnął jeszcze niezbędnego poziomu, żadne wyjaśnienia nie wystarczą, by zrozumiało i przyswoiło sobie nowe dla niego pojęcia. Przykładów ilustrujących to zjawisko można podać wiele. Wiedza matematyczna nie powstaje też w wyniku asocjacji, w wyniku kojarzenia tego, co uczeń widzi, ze słowami lub symbolami, choć takie przekonanie było rozpowszechnione w dziewiętnastym wieku i dziś jeszcze nieraz się ujawnia.

Wiedza matematyczna tworzy się w umyśle dziecka w wyniku długoletniego procesu, w którym podstawową rolę pełnią **samodzielnie wykonywane czynności** (takie jak np. przeliczanie przedmiotów, układanie żetonów mających przedstawiać osoby lub rzeczy, o których jest mowa w zadaniu arytmetycznym, zabawa w kupno-sprzedaż, dopasowywanie do siebie wyciętych figur geometrycznych). **Każde dziecko musi przejść tę drogę osobiście.** Nie wystarczy, że patrzy z bliska na czynności wykonywane przez kogoś innego. Szemińska opisała sugestywnie swe doświadczenia z dziećmi przedszkolnymi, które znacznie lepiej zrozumiały równoliczność kulek w dwóch kolorach, gdy same wkładały równocześnie te kulki po jednej do naczynia, niż wtedy, gdy patrzyły z bliska, jak ktoś inny je wkłada i objaśnia, co robi.

2. Na czym polega realizacja konstruktywistycznych zaleceń?

Szczegółowemu omówieniu matematycznej edukacji wczesnoszkolnej, z naciskiem na podejście konstruktywistyczne, poświęcone jest 160 stron mojego tekstu *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne* w książce *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna* (Semadeni, 2015). Tam też podana jest szczegółowa bibliografia. Tutaj ograniczam się do omówienia tylko niektórych zagadnień.

Rola nauczyciela nie może polegać na zwykłym przekazywaniu dziecku tego, co jest określone w programie i rozwinięte w podręczniku. Nauczyciel powinien **organizować rozmaite sytuacje dydaktyczne** i stwarzać w ten sposób warunki sprzyjające konstruowaniu się w umysłach uczniów ważnych pojęć i schematów logiczno-matematycznych, które staną się fundamentem ich wiedzy. Zajęcia mogą mieć częściowo formę zabawy, ale będą skuteczne tylko wtedy, gdy dadzą uczniom sposobność do **obserwowania, zbierania doświadczeń, do refleksji** nad tym, co robią, do **odkrywania pewnych prawidłowości**.

Podejście konstruktywistyczne należy do tego nurtu pedagogiki, który kładzie nacisk na **aktywność** osoby uczącej się. Dobrze to wyrażało stare nauczycielskie powiedzenie, że w okresie wczesnoszkolnym uczniowie „myślą rękami”. Nie wystarczy jednak spontaniczna, nieukierunkowana aktywność dziecka w swobodnych zabawach. Bardzo ważne jest, by **zastanawiało się ono nad efektem** wykonanych już czynności, by próbowało **przewidzieć**, co się stanie, gdy np. dosunie lub odsunie kilka żetonów, wytnie jakieś figury, by w razie wątpliwości samodzielnie **sprawdzało** swoje przypuszczenia (dla upewnienia się bądź też stwierdzenia jakiejś niezgodności). Takie czynności dziecko może wykonywać w domu, w przedszkolu i w szkole. Powinno też rozmawiać o tym – w swoim naturalnym języku – z innymi osobami.

Wiedza matematyczna tworzy się w umyśle uczącego się dziecka pod wpływem wykonywania odpowiednich czynności, związanych najczęściej z **ruchem**, oraz zastanawiania się nad celem i sensem tego, co robi. Szczególnie ważne są czynności wykonywane przez dziecko **rękomą** oraz **rozmowa o tych czynnościach** z dorosłymi i z rówieśnikami.

Dobrze, gdy nauczyciel stara się wykorzystywać **naturalną ciekawość** dzieci, która może też dotyczyć kwestii matematycznych, jeśli są im odpowiednio przedstawione. Uczniowie powinni być motywowani do samodzielnych prób z konkretami (takimi jak np. patyczki, klocki, tekturki z napisami 1, 10, 100, ... będące „pieniężmi na niby”). Dobrze też zachęcać ich do **stawiania pytań** bez obawy, że powiedzą coś niedobrze lub się pomylą. Trzeba przy tym opierać się na ich **wiedzy pozaszkolnej**, potocznej. Ważne też jest, by wykazywać zainteresowanie tym, co dzieci robią, zachęcać je do rozmowy, do mówienia o swych spostrzeżeniach i przypuszczeniach. Nauczyciel powinien być opiekunem, organizatorem, powinien inspirować uczniów, wspierać ich działanie, zachęcać do samodzielnego myślenia. To ostatnie ściśle wiąże się z **prawem ucznia do popełnienia błędu** – tę fundamentalną kwestię będę jeszcze rozwijać.

Podjęcie konstruktywistyczne może być realizowane zarówno w pracy pojedynczych dzieci, jak i w pracy grupowej. Ponadto **nacisk na metody aktywne nie oznacza całkowitego odrzucenia metod podających** czy nauki pamięciowej. Formy te nie powinny jednak zdominować nauczania.

Bardzo ważna, choć nieraz niedoceniana, jest refleksja. Po fazie samodzielnych czynności dzieci – po manipulowaniu konkretami, wycinaniu, rysowaniu – powinna pojawić się na koniec jakaś **ocena tego, co było robione**, dokonana najpierw przez uczniów. Nauczyciel pyta, co zauważyli i czego się nauczyli, ale nie „wyciąga” oczekiwanych przez siebie prawidłowych wypowiedzi. Następnie – jako osoba znacząca – krótko podsumowuje doświadczenia. Bez takiego podsumowania nieraz zdarza się, że **po interesujących zajęciach nie pozostaje w umyśle dzieci żaden ślad**, że już następnego dnia nic nie pamiętają lub że w pamięci zostają im jakieś matematycznie nieistotne szczegóły. Mogą zdarzyć się jednak sytuacje, w których uczniowie zaciekawiają się na zajęciach jakąś prawidłowością, a mimo to nauczyciel słusznie im jej nie objaśnia, bowiem uważa, że dla części dzieci byłoby to przedwczesne; zostawia ich z tym zaciekawieniem, by dać im czas na dalsze obserwacje i nowe własne doświadczenia.

Oto główne cele ogólne konstruktywistycznie nastawionej edukacji:

- wspomaganie rozwoju umysłowego każdego dziecka, w szczególności tworzenia się w jego umyśle odpowiednich schematów poznawczych i rozwijania myślenia operacyjnego (ten ostatni bardziej szczegółowo omówię poniżej);
- zebranie przez dziecko doświadczeń niezbędnych do ukształtowania się odpowiednich pojęć matematycznych;
- stymulowanie rozumowań matematycznych, samodzielności myślenia i krytycyzmu (na miarę dziecka);
- rozwijanie umiejętności matematyzowania łatwych zagadnień zaczerpniętych z otaczającej dziecko rzeczywistości i stosowania nabytej wiedzy w konkretnych sytuacjach.

3. Respektowanie poczucia sensu u dziecka i jego wiedzy osobistej

Kształtowanie pojęć matematycznych powinno być powiązane ze wspomaganie procesu konstruowania się w umyśle dziecka **znaczenia, sensu** poznawanych na lekcjach terminów matematycznych, zdań i symboli. Chodzi tu o stopniowe, coraz lepsze rozumienie m.in. znaczenia zapisów symbolicznych typu $2 + 4 = 6$ lub $4 < 7$ oraz znaczenia słów takich jak

„odjąć”, „zmierzyć”, „rozwiązać równanie”, „prostokąt”. Znaczenie tych symboli i słów powinno wywodzić się z ich praktycznego, życiowego sensu i stopniowo przechodzić w znaczenie oderwane od konkretnych przykładów. Należy odróżniać dwa rodzaje znaczenia jakiegoś terminu, zdania czy symbolu: jego **znaczenie naukowe** i **znaczenie osobiste** w umyśle pojedynczego ucznia.

Znaczenie naukowe, oficjalne, publiczne opisane jest w **programach szkolnych i podręcznikach**. Nie powinno się wymagać w klasie ścisłej, naukowej definicji danego terminu matematycznego czy znaku, lecz jakiejś modyfikacji znaczenia dostosowanej do możliwości umysłowych dzieci w danym wieku. Niestety bywają definicje podawane zbyt formalnie, zbyt sztywno (z obawy przed nieścisłościami), w sposób niezrozumiały dla dzieci, w języku odbiegającym od stosowanego w sytuacjach życiowych.

Znaczenie osobiste, intuicyjne, nieostre, często niezbyt poprawne, **konstruuje się w umyśle każdego dziecka** indywidualnie w wyniku jego doświadczeń wyniesionych z życia codziennego i z zajęć w klasie szkolnej. U jednych uczniów jest to znaczenie bogate, elastyczne, które może być stosowane w różnych kontekstach, a u innych – znaczenie wąskie, sztywne, często ograniczone do zapamiętania, jak należy używać odpowiednich słów czy znaków w typowych zadaniach. W centrum uwagi w szkole bywa reprodukcja przez uczniów „uszkolnionych” porcji wiedzy naukowej, a na wiedzę osobistą dziecka nie zwraca się uwagi.

Różnice między wiedzą naukową i wiedzą osobistą dziecka opisały na wyrazistych przykładach Dorota Klus-Stańska i Marzenna Nowicka (2009).

Bardzo ważne jest, by matematyczna wiedza osobista ucznia – wywodząca się z jego doświadczeń – stawała się stopniowo (w wyniku długofalowego procesu) zgodna z wiedzą naukową bez nadmiernych, przekraczających możliwości dziecka dysonansów poznawczych. Wiedza naukowa ucznia powinna być oparta na wcześniejszej wiedzy osobistej i z nią należycie zintegrowana; powinna wywodzić się z właściwego **intuicyjnego rozumienia** sensu pojęć matematycznych i z tego, co w związku z tym uczeń robi i co mówi.

Matematyka szkolna powinna mieć sens dla dziecka, jest to kluczowy warunek efektywnego uczenia się. Najpierw jest to jedynie sens praktyczny, ściśle powiązany z tym, co dla dziecka ważne życiowo, i wyrażony w jego języku. Dlatego konkretne czynności wykonywane przez ucznia muszą jawić mu się jako sensowne, np. układane patyczki mogą być „cukierkami na niby”, jednak zadanie ich dotyczące i jego rozwiązanie powinny być dla

dziecka naturalne w jego kontekście życiowym. Takie czynności i doświadczenia to podstawa konstruowania ogólniejszych schematów umysłowych, stopniowo coraz mniej zależnych od konkretnych przedmiotów i sytuacji.

Często spotykany jest pogląd, że małe dzieci nie rozumują logicznie. Otóż – jak to wykazywał Piaget – ich rozumowanie jest logiczne, ale logika dziecka jest różna od logiki dorosłego.

Podstawowy błąd edukacyjny polega na tym, że nauczyciel wymaga od dziecka, by to ono dostosowało się do sposobu myślenia dorosłych. Zgodnie z właściwym, jakkolwiek znacznie trudniejszym, podejściem właśnie dorosły jako bardziej wykształcony próbuje wniknąć w tok myślenia dziecka i dobiera zadania tak, by były możliwie zgodne z jego poczuciem sensu.

Wtedy dziecko staje się pojętne, chętnie rozwiązuje zadania i w ten sposób efektywnie się uczy. Później treść zadań powinna stopniowo być coraz mniej uzależniona od konkretnego.

Niestety narzucana uczniowi w szkole strategia rozwiązywania zadań zbyt szybko staje się dla niego sztuczna i obca. To właśnie jest jedną z głównych przyczyn niepowodzeń z matematyki.

Dziecięca logika opiera się na silnym poczuciu sensu, toteż zadanie niezgodne z tym poczuciem staje się dla niego niezrozumiałe, obce. W podręcznikach szkolnych jest wiele zadań, których sensu dziecko nie widzi; w efekcie dostaje więc etykietkę niezdolnego do matematyki.

Rozpatrzmy pozornie proste zagadnienie: **przemienność dodawania**. Termin ten jest typowym przykładem wiedzy naukowej. Około 40 lat temu pojawił się w programie klasy 1, a w jednym z podręczników do klasy 2 wydrukowany był nawet jego zapis algebraiczny: $a + b = b + a$. Tak wiernie próbowano przenosić wiedzę akademicką do nauczania początkowego! Przemienność ta jest ważna, ale podawanie dzieciom jej nazwy byłoby zupełnie zbytecznym obciążaniem ich pamięci trudnym i obcym słowem. Wystarczy, jeśli uczniowie wiedzą np., że gdy w rzędzie stoją 4 czerwone świece i 5 żółtych, to licząc je od lewej, wychodzi nam $4 + 5 = 9$, a licząc od prawej, musimy dostać tyle samo w odwrotnej kolejności $5 + 4 = 9$. Przecież to te same świece, wynik liczenia musi być taki sam.

Podawanie ogólnego prawa jest zbędne, ważne jednak, by dziecko stopniowo uświadamiało sobie – na różnych przykładach, w różnych sytuacjach – że tak jest też przy innych liczbach, że tak jest zawsze. To uogólnienie nie pojawia się jednak nagle na jakiejś poświęconej temu lekcji, lecz stopniowo konstruuje się w umyśle dziecka.

Przemienność dodawania często zapisywana jest w podręcznikach w postaci np. $3 + 4 = 4 + 3$. Matematyk interpretuje to następująco: liczba $3 + 4$ jest równa liczbie $4 + 3$. Dla dziecka przez pewien czas takie rozumienie tego pozornie prostego zapisu jest niedostępne, bowiem

symbol typu $3 + 4$ **nie przedstawia dla niego liczby**, lecz oznacza polecenie, **obliczenie do wykonania**. Widząc napis $3 + 4$, dziecko wie, że ma dodać podane liczby i ma to być zapisane w postaci $3 + 4 = 7$. Podobnie napis $4 + 3$ nie oznacza dla dziecka liczby, lecz inne polecenie, które trzeba wykonać w postaci $4 + 3 = 7$. Dziecko wie, że wyniki obu obliczeń są takie same, ale naturalnym dla niego zapisem tego faktu są dwie osobne równości: $3 + 4 = 7$ i $4 + 3 = 7$. Zobaczywszy zapis $3 + 4 = 4 + 3$, wszystkie dzieci początkowo chcą go uzupełnić przez dopisanie na końcu $= 7$. Jak to wykazali Gray i Tall, traktowanie wyrażenia typu $3 + 4$ jako pojedynczej liczby jest wyższym poziomem rozumienia dodawania i przydaje się bardzo przy pewnych obliczeniach złożonych w klasie 3, niezbędne zaś jest w rachunku algebraicznym (w gimnazjum).

W praktyce szkolnej wiedza osobista uczniów jest często ignorowana. Nauczyciel przekazuje im elementarne porcje wiedzy naukowej, często tak sformułowane, że dzieci nie widzą w tym sensu. Nieraz przybiera to postać **gotowych reguł**. Jeśli nawet uczniowie je sobie przyswoją, nie jest to ich wiedza, nie stanowi właściwego fundamentu dla ich dalszego rozwoju i okazuje się mało przydatna, gdy trzeba ją stosować.

Wszelkie czynności matematyczne muszą jawić się dzieciom jako sensowne, służące do jakiegoś zrozumiałego dla nich celu. Uczniowie powinni widzieć, że matematyka jest przydatna w życiu. Sensowne powinny też być sposoby wykonywania przez dziecko obliczeń, sformułowania dawanych mu zadań i sposoby ich rozwiązywania. Wykonywanie czynności niezrozumiałych dla dziecka, a wymuszonych przez podręcznik lub nauczyciela, jest szkodliwe zarówno dla ucznia słabego (który przestaje rozumieć i zaczyna się bronić przed matematyką), jak i dla zdolnego (matematyka staje się dla niego nieinteresująca, nudna, uczeń się nie rozwija).

Dla przykładu porównajmy polecenia: *podziel papierową pizzę (lub tort) na cztery równe części* i *podziel papierowe koło na cztery równe części*. Matematyczny sens obu tych poleceń jest taki sam, jednak dziecko rozumie praktyczny, życiowy sens tego pierwszego, spotkało się już z takimi sytuacjami, wie, czego się od niego oczekuje. Podział figury geometrycznej, jaką jest koło – dla dorosłego bardzo prosty – dziecko odbiera jako bardziej abstrakcyjny. Ten wyższy poziom jest wprawdzie naszym celem edukacyjnym, ale droga do niego wiedzie przez przykład pojęciowo bliższy dziecku.

Podobnie można porównać dwa polecenia: *oblicz długość płotu* i *oblicz obwód prostokąta*. Czasem mała zmiana sformułowania, dla dorosłego nieistotna, zmienia zadanie ze zrozumiałego dla ucznia na zadanie zbyt trudne lub odwrotnie.

4. Konflikty poznawcze i rola manipulowania konkretami

Aby zrozumieć, na czym może polegać konflikt poznawczy, rozpatrzmy następujący przykład. Dorosły podaje dziecku słowną informację, że *miś stoi na drabince na piątym szczeblu*. Pyta, ile szczebli jest *poniżej tego szczebla*. Badania Szemińskiej wykazały, że pewne dzieci były przekonane, że musi być ich pięć. Prosiła wtedy o policzenie tych szczebli (na rysunku lub na prawdziwej drabince). Były zdziwione, gdy mogły się same przekonać, że jest inaczej, że są tylko cztery szczeble. Nie wystarczy jednak taki pojedynczy przykład. Trzeba sytuację parokrotnie powtórzyć na podobnych, ale różniących się przykładach (np. dziecko stoi na szóstym schodku; dzieci lepią ósmego bałwanka, ile bałwanków już ulepiły).

Typowe czynności wspomagające konstruowanie nowych pojęć powinny być organizowane przez stworzenie lub opisanie dziecku sytuacji, z której wyłania się jakieś pytanie, jakieś zadanie. Uczeń próbuje odpowiedzieć na to pytanie, rozwiązać dane mu zadanie. Wykonuje przy tym (sam lub z pomocą nauczyciela bądź kolegi) jakieś czynności. Ograniczenie się do jednorazowej czynności bywa na ogół nieskuteczne, bowiem może okazać się, że choć dziecko rozumiało, co robi, to po jednym wykonaniu niewiele z tego zostało, nowa wiedza uleciała. Gdy uda mu się rozwiązać zadanie, należy dać mu kolejne okazje, by mogło powtórzyć takie same lub podobne czynności i upewnić się przy tym, że dobrze rozwiązuje zadanie. **Gdy uczeń już wie, jak to się robi, jest zadowolony**, że nauczył się czegoś nowego i chce zwykle to jeszcze parę razy powtórzyć. Ta utrwalająca faza jest ważna, bo **sprawia przyjemność sukcesu**. Efektywne uczenie kończy się, gdy dziecko czuje, że już wystarczająco poznało problem; nie czuje wtedy potrzeby dalszego powtarzania czynności. Przestaje się tym interesować, chce robić coś innego.

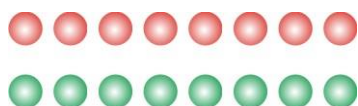
Niezgodności między wcześniejszymi sądami ucznia a nowymi, zauważanymi faktami są nieodzownym aspektem rozwoju struktur poznawczych, ale powinny być stopniowo pokonywane przez samo dziecko w naturalnym procesie dostosowywania się jego schematów umysłowych do nowych sytuacji.

Mechanizm ten jest opisany w teorii Piageta. Jeśli struktury poznawcze – po ich zaburzeniu przez ujawniające się niezgodności – ulegną w wyniku działania dziecka odpowiedniej modyfikacji, mogą przejść w nowy stan równowagi. Z tego powodu warto nawet przemyśleć i celowo **wywołać konflikt poznawczy**, w którym jakieś fakty obserwowane przez dziecko nie zgadzają się z jego wcześniejszymi mniemaniami. Chodzi o to, aby zaciekać ucznia i skłonić go do zastanowienia się i sprawdzenia, jak to jest naprawdę, tak aby sam mógł się

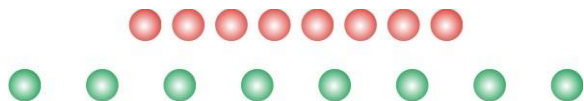
o tym przekonać. Nie może to jednak być przedwczesne. Jeśli dziecko nie dojrzało do tego, lepiej zostawić kwestię bez komentarzy.

Dzieci nieraz nieświadomie łączą cechy ilościowe z jakościowymi. Typowy konflikt poznawczy stwarza sytuacja, gdy uczeń widzi w jednym koszyku np. 7 dużych, a w drugim 7 małych jabłek. Gdy postawi się pytanie: *W którym koszyku jest więcej jabłek?*, dziecko, opierając się na osobistej, przedszkolnej wiedzy, odpowie, że dużych jabłek jest więcej. Nauczyciel klasy 1 oczekuje policzenia jabłek w każdym koszyku (lub przyporządkowania ich jeden do jednego) i spodziewa się szkolnej odpowiedzi: jest tyle samo. Dla dziecka jest jednak oczywiste, że dużych jabłek jest więcej (bo przecież jest tu więcej do zjedzenia). Gdyby lekcja dotyczyła ważenia, odpowiedź dziecka byłaby uznana za poprawną, a gdy dotyczy równoliczności zbiorów – jest niepoprawna!

Przypomnijmy klasyczny Piagetowski **test stałości liczby**. Jest to dobry przykład naturalnych trudności i niezgodności ujawniających się u każdego dziecka w pewnym stadium rozwoju. Otóż dla uczenia się arytmetyki kluczowa jest świadomość, że liczba przedmiotów nie zmienia się, gdy zostaną rozsunięte tak, że zajmą więcej miejsca. Kwestia ta była badana systematycznie po raz pierwszy przez Piageta i Szemińską. Dziecku wpierw pokazuje się szereg dwóch rzędów żetonów – np. 8 czerwonych i 8 zielonych, ułożonych tak, że od razu widać, że ich jest tyle samo.



Zadaje mu się pytanie: *Których kólek jest więcej – zielonych czy czerwonych? A może jest tyle samo?* Dziecko odpowiada, że jest ich tyle samo. Często dla upewnienia się liczy przy tym jedno i drugie żetony. Potem następuje druga faza testu: dorosły zakłóca wzrokową oczywistość równości, rozsuwając na oczach dziecka zielone żetony tak, że zajmują wyraźnie więcej miejsca, i powtarza pytanie.



Dziecko na **przedoperacyjnym poziomie** rozwoju sugeruje się zewnętrznym wyglądem układu żetonów i mówi, że teraz zielonych kólek jest więcej; bywa o tym zdecydowanie przekonane, mówi, że to „przecież widać”. Jeżeli jest na takim właśnie niskim poziomie, nie pomoże objaśnianie i narzucanie mu poprawnej wypowiedzi. Owszem, dziecko może

nauczyć się wyjaśniać to poprawnie w języku dorosłego, ale będzie to jedynie wyuczona wypowiedź pasująca do tej właśnie sytuacji, a nie przejście na wyższy poziom myślenia.

Jeżeli zaś badane dziecko jest przekonane, że po dokonanej zmianie nadal jest tyle samo zielonych kółek co czerwonych, określa się to terminem **stałość liczby** (kardynalnej) lub **konserwacja liczby**. Jest to jeden ze wskaźników przejścia dziecka na **poziom operacyjny** w rozwoju jego myślenia. Dzieci osiągają ten poziom rozwoju przeciętnie w wieku pomiędzy 6 a 7 lat, ale jeszcze około jednej piątej siedmiolatków pozostaje na poziomie przedoperacyjnym.

Stałość liczby kardynalnej jest niezbędna do prawidłowego ukształtowania pojęciowego dodawania abstrakcyjnych liczb (oderwanych od konkretnego) i wszystkich pozostałych działań arytmetycznych. Dodawanie wywodzi się z czynności, z których typowa jest następująca: w jednej kupce dziecko widzi 4 krążki, a w drugiej 3. Potem zsuwa je razem i liczy, że wszystkich razem jest 7. Po zsunięciu krążki zajmują jednak mniej miejsca. Jeśliby dziecko sądziło, że jest ich teraz mniej niż przedtem, to trudno byłoby budować na tym jego przekonanie, że 7 to 4 i 3. Nie znaczy to bynajmniej, że dziecko nie może zacząć uczyć się dodawania przed osiągnięciem poziomu operacyjności. Owszem – może, a nawet powinno się uczyć, ale z **możliwością sprawdzania wszystkiego w każdej chwili na konkretach**.

Podkreślić należy, że chodzi tu o danie uczniowi takiej sposobności, nie zaś o zmuszanie go do liczenia na konkretach, gdy daje sobie radę bez nich. Natomiast uczenie dzieci dodawania na poziomie przedoperacyjnym oparte jedynie na zapamiętywaniu wyników (bez chociażby podpórki w postaci liczenia na palcach) działa destrukcyjnie, jest **szkodliwe**.

Dydaktycznie bardzo znaczące, choć mało znane, są wyniki badań Szemińskiej, która zmodyfikowała standardowy test Piageta, zastępując żetony przez odpowiednio dobrane pary przedmiotów, np. przez 8 małych zielonych domków bez dachów i 8 czerwonych dachów. Układa się je tak, że równoliczność tych zbiorów jest oczywista.



Pozornie zmiana typu testu jest zupełnie nieistotna; poprzednie małe, okrągłe, identyczne żetony w dwóch kolorach wydają się matematycznie i psychologicznie równie konkretne jak domki i dachy. Oprócz tej zmiany test Szemińskiej był zorganizowany tak samo jak

test oryginalny. Po stwierdzeniu równoliczności domków i dachów jeden z tych rzędków był rozsuwany na oczach dziecka:



Szczególnie godne uwagi jest to, że poprawne odpowiedzi podawały już dzieci czteroletnie, o około dwa lata wcześniej niż w oryginalnym teście! Piaget określił ten poziom odpowiedzi dziecka terminem **pseudokonserwacja**. Człon „pseudo-” wyraźnie sugeruje, że to nie jest jeszcze prawdziwa konserwacja Piagetowska. Nasuwa się oczywiste pytanie: co powoduje, że klasyczny test stałości liczby wymaga znacznie wyższego poziomu rozwoju umysłowego niż jego pozornie równoważna modyfikacja typu domy i dachy? Szemińska wyjaśniała (w duchu Piageta), że stałość liczby zawsze wynika z identyfikacji par, z przyporządkowania wzajemnie jednoznacznego, które jest wyraźniejsze i bardziej się narzuca przy parach: domki i dachy lub (to inne warianty jej testu) uchwyty i koszyki bez uchwytów bądź filiżanki i spodki, bądź jajka i kieliszki do jajek (choć w tych dwóch ostatnich przypadkach efekt był słabszy niż przy domkach i dachach).

Za trafniejsze uważam jednak inne wyjaśnienie: chociaż żetony w klasycznym teście są konkretne i można nimi manipulować, **dzieci nie wiedzą, w jakim celu są pytane**, czy jest tyle samo czerwonych kółek co zielonych. Pytanie to nie ma to żadnego związku z ich dotychczasowymi doświadczeniami życiowymi. Zadane **pytanie jest formalne**, dotyczy znaczenia słów: „Czy jest tyle samo?” oderwanego od życiowo zrozumiałej sytuacji. O to zresztą chodzi w tym teście, on ma być właśnie taki formalny. Natomiast cel pytania, czy jest tyle samo domków co dachów, życiowo jest jasny: każdy dom musi mieć dach, dach bez domu jest bezużyteczny. Pytanie, czy jest tyle samo domków co dachów, ma dla dziecka sens, nie jest więc ono zmyłone przez zwiększanie odległości między dachami. Żetony, choć też są konkretne, nie nasuwają żadnych wskazówek, po co takie pytanie jest zadawane. Donaldson podała wiele innych przykładów wskazujących na to, że istotnie lepsze odpowiedzi w zadaniach typu piagetowskiego padają wtedy, gdy pytania są tak sformułowane, że dzieci rozumieją ich życiowy sens.

Powyższy przykład domów i dachów pokazuje, że dana idea matematyczna może mieć wiele różnych sformułowań w języku konkretów, na różnych poziomach. **Modyfikacja kontekstu lub sposobu wystawienia zadania**, pozornie matematycznie nieistotna, **może zasadniczo zmienić jego trudność dla dzieci**. Przykład ten daje zarazem poglądową wskazówkę, jak należy wprowadzać nowe pojęcia matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej.

- Trzeba sformułować jakieś konkretne zagadnienie, mające sens dla dzieci, i rozwiązywać je, stosując rozumowanie odpowiadające temu kontekstowi, tak by było zgodne z życiowymi doświadczeniami uczniów.
- Potem w kolejnych, analogicznych zadaniach należy stopniowo zmniejszać zależność rozwiązania zadania od kontekstu.
- Dopiero po zdobyciu przez dzieci dostatecznie wielu doświadczeń powinno się przechodzić do bardziej abstrakcyjnych wersji tego samego zadania.

Niestety często w praktyce szkolnej przejście do wersji abstrakcyjnej i do zapisu symbolicznego **następuje zbyt szybko** i jest to jedną z głównych przyczyn trudności wielu dzieci z matematyką.

Podstawową trudnością przy realizacji powyższych zaleceń jest oczywiście to, że dzieci **bardzo różnią się podatnością na uczenie się** i mają różny zakres wcześniejszych doświadczeń. Od tego zależy liczba niezbędnych powtórzeń. Może być zbyt mała dla uczniów słabszych i zarazem zbyt duża dla zdolniejszych, którzy szybko nudzą się, gdy dostają wiele podobnych zadań. Należy je więc **modyfikować i urozmaicać**, tak jednak, aby dla wolniejszych uczniów zmiany nie okazały się zbyt częste, a skoki od jednego typu zadań do innego nie były nadmierne. Nie wolno też zapominać, że seria czynności na konkretach odniesie właściwy skutek jedynie wtedy, gdy nauczyciel poprowadzi rozmowy z dziećmi tak, aby próbowały one formułować swoje spostrzeżenia, aby mogło ujawnić się to, co było istotnego w tych logiczno-matematycznych doświadczeniach. Nauczyciel w ten sposób **wspiera naturalny proces** konstruowania się schematów umysłowych u dzieci.

5. Znaczenie operacyjności myślenia dla sukcesu w uczeniu się arytmetyki

Opierając się na swych badaniach, Gruszczyk-Kolczyńska stwierdziła, że większość niepowodzeń w uczeniu się matematyki w klasach 1–3 wiąże się z tym, że dzieci te poddane zostały typowo szkolnemu nauczaniu – zakładającemu *implicite* osiągnięcie poziomu operacyjnego – chociaż jeszcze tego poziomu nie osiągnęły. Ponieważ **kilku przedoperacyjnych siedmiolatków zdarza się w niemal każdej typowej klasie**, był to problem bardzo poważny. Staje się teraz jeszcze poważniejszy, gdy niemal wszystkie sześciolatkowie idą do szkoły (jakkolwiek dawniejsze zajęcia w klasie zerowej też często nie były dostosowane do przedoperacyjnego poziomu dzieci i sam fakt pójścia sześciolatka do klasy

zerowej nie gwarantuje, że nauczanie będzie lepiej dostosowane do jego możliwości i potrzeb).

Nauczyciele powinni w klasie 1 starać się – przez odpowiednio dobrane aktywności – wspierać naturalny rozwój myślenia dzieci. W 2008 r., biorąc pod uwagę projektowane obniżenie wieku szkolnego, w ówczesnej podstawie programowej chciano **chronić sześciolatkę przed zawyżaniem wymagań** i w tym celu wyodrębniono klasę 1 z bloku 1–3 i sformułowano pewne wymogi, z których dwa zasługują na szczególną uwagę.

„Uczeń kończący klasę 1:

- ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów w porównywanych zbiorach,
- układa obiekty (np. patyczki) w serie rosnące i malejące, numeruje je; wybiera obiekt w takiej serii, określa następne i poprzednie” (MEN, 2008. s. 25).

Nawiązuje to w sposób oczywisty do piagetowskich testów diagnozujących osiągnięcie poziomu operacyjnego przez dziecko. Pierwszy z tych wymogów to omawiana powyżej stałość liczby; drugi dotyczy porządkowania obiektów według wielkości. Celem ich było uświadomienie autorom podręczników, metodykom i nauczycielom, że konieczne jest uwzględnienie – zwłaszcza w pierwszym półroczu klasy 1 – wielu ćwiczeń **wspomagających proces przechodzenia uczniów na poziom operacyjny**. Jest to niezbędne, aby przeciwdziałać niepowodzeniom szkolnym z matematyki. Chodziło też o to, aby zerwać ze złą tendencją zbyt wczesnego przechodzenia w szkole na poziom symboliczny i na mechaniczne ćwiczenie obliczeń wykonywanych na liczbach, niewystarczająco podbudowane czynnościami na konkretach.

W 2014 r. zmieniono podstawę programową dla klas 1–3 i usunięto ochronne wyodrębnienie klasy 1¹. Tym samym zniknęły cytowane tu dwa wymogi, kluczowe dla harmonijnego rozwoju pojęć matematycznych dziecka (umieszczanie ich jako wymogów po klasie 3 nie miałoby sensu). W podręczniku dla klasy 1 wydanym w 2014 r. przez Ministerstwo Edukacji Narodowej (MEN) nie ma odniesienia do tych dwóch wymogów i do wspomagania przechodzenia dzieci na poziom operacyjny.

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dn. 30 maja 2014 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2014 r. poz. 803).

Można zresztą zasadnie spytać, czy w ogóle jakakolwiek wydrukowana książka może być właściwym narzędziem do osiągnięcia tego typu celów kształcenia. Niezbędne są przecież doświadczenia dziecka zebrane przy samodzielnym liczeniu przedmiotów w różnorodnych konkretnych sytuacjach.

6. Zeszyty ćwiczeń

Celów sformułowanych w podstawie programowej dziecko nie osiągnie przez oglądanie obrazków, czytanie gotowych tekstów (lub słuchanie, jak ktoś inny czyta) i wypełnianie zeszytów ćwiczeń stanowiących główny środek dydaktyczny. W komentarzu do podstawy programowej z 2008 r. znajduje się bardzo ważny zapis: „Dzieci mogą korzystać z zeszytów ćwiczeń najwyżej przez jedną czwartą czasu przeznaczonego na edukację matematyczną” (MEN, 2008, s. 57). Niestety zbyt rzadko jest to przestrzegane, bowiem taka forma pracy jest najłatwiejsza dla nauczyciela. Wśród materiałów edukacyjnych używanych w klasach 1–3 w polskich szkołach **nadmierną rolę zaczęły pełnić zeszyty ćwiczeń i kserowane materiały**. Wielu nauczycieli nie wyobraża sobie bez nich prowadzenia lekcji.

Gruszczyk-Kolczyńska nazywa to „papierowym sposobem prowadzenia edukacji matematycznej”. Opisuje ona trafnie podstawową wadę takiego podejścia: to, co powinno być aktywnością dziecka na **prawdziwych konkretach** (patyczki, klocki itp.), **którymi można manipulować**, zostaje zastąpione – wbrew współczesnej psychologii rozwojowej – przez oglądanie statycznych rysunków i uzupełnianie abstrakcyjnych schematów graficzno-symbolicznych (dobrze znanych nauczycielom, np. okienek i grafów, lub wymyślonych przez autorów do jednorazowego zastosowania). Uczniowie mają wpisywać odpowiednie słowa lub liczby we właściwe miejsca zeszytu ćwiczeń, przekreślać błędne zapisy, łączyć liniami elementy według podanej im reguły.

Zeszyty ćwiczeń, owszem, mogą pomóc dzieciom, ale jedynie pod warunkiem, że będą **uzupełnieniem aktywności na konkretach**, że nie będą jej zastępować. Zadania z podręcznika lub zeszytu ćwiczeń powinny stanowić kontynuację czynności manipulacyjnych, przejście od ruchu do rysowania i pisania, utrwalanie i werbalizowanie tego, co dziecko poznało w trakcie wcześniejszych aktywności z konkretami.

Pierwsze polskie zeszyty ćwiczeń z matematyki do klasy 1 ukazały się w 1977 r., napisała je Zofia Cydzik. Wtedy wydawało się to znakomitą ideą. Była to próba czynnościowego nauczania opartego na uzupełnianiu przez uczniów tekstu i rysunków w wydrukowanej, odpowiednio metodycznie opracowanej publikacji. Poważną jednak wadą tych zeszytów było

podawanie uczniom gotowych szablonów obliczeń. Narzucało się im schemat kolejnych kroków obliczenia, który należało wiernie naśladować, kopiując wzorzec podany na początku zadania. Typowe polecenie brzmiało: *Obliczaj według wzoru*. Podejście to przyjęło się potem w wielu innych zeszytach ćwiczeń. Nauczyciel oczekiwał, że uczeń opanował podaną metodę, skoro rozwiązał całą serię podobnych zadań. Niestety dziecko mogło przy tym zupełnie nie ogarniać struktury narzucanych mu przekształceń. Zbyt często ograniczało się to do mechanicznego wstawiania nowych liczb identycznie jak w podanym wzorcowym przykładzie.

Nadmierne opieranie nauczania na zeszytach ćwiczeń doprowadziło do wielu niedobrych zjawisk. Okazało się, że zeszyty ćwiczeń:

- miały podstawową wadę – **eliminowały** zwykłe **zeszyty w kratkę**, mające ogromne walory kształcące (wypełnianie gotowych miejsc w wydrukowanym zeszycie nie zastąpi samodzielnego pisania od góry strony przez dziecko);
- dawały uczniom gotowe „półprodukty”, co miało ułatwić nauczanie, ale oduczało samodzielności myślenia;
- przyczyniły się do zaniedbania dwóch kluczowych elementów edukacji wczesnoszkolnej: manipulowania konkretami oraz **rachunku pamięciowego**.

Dodatkowo autorzy zeszytów ćwiczeń, biorąc pod uwagę trudności dzieci z czytaniem, często usiłowali przedstawić w wersji rysunkowej to, czego nie da się objaśnić w zrozumiały sposób (np. podział 18 sztuk na 3 równe części jest łatwy do wykonania na ruchomych żetonach i praktycznie niewykonalny w papierowej matematyce; z drugiej strony mieszczanie, np. po 3, da się łatwo pokazać rysunkowo). Pojawiały się także wymyślane przez autorów **pozorne ułatwienia metodyczne**, które zamiast pomagać dzieciom, stwarzały im dodatkowe kłopoty. Nową specyficzną trudnością było odgadywanie, co autor miał na myśli, przy czym zdarzało się, że po rozszyfrowaniu trudnego polecenia czy dziwnego rysunku zadanie okazywało się bardzo łatwe.

Obrazki w podręczniku nie zastąpią ruchomych konkretów, których układ uczeń może zmieniać. W przypadku nieruchomego obrazka ewentualne przekształcenia muszą być dokonywane jedynie w myśli, co dla wielu dzieci jest zbyt trudne. Obrazek bywa natomiast potrzebny m.in. jako uzupełnienie zadania tekstowego, by zilustrować dziecku sytuację, która ma stanowić kontekst zadania (niezbyt mu znany z jego doświadczeń życiowych).

7. Behawiorystyczne podejście do edukacji matematycznej

Sprzeczne z konstruktywizmem tezy głosił **behawioryzm**. Był to ważny kierunek badań naukowych w psychologii, powstały sto lat temu w Stanach Zjednoczonych. Opierał się na ścisłych pomiarach rozmaitych przejawów zachowania się jednostki (amer. *behavior*). Kierunek ten cechuje m.in.:

- traktowanie uczącego się dziecka jako jednostki **biernej**,
- ujmowanie nauczania w kategoriach **bodziec–reakcja**,
- podawanie **gotowych reguł i procedur** postępowania,
- praktyka **uczenia się matematyki na pamięć**.

To ostatnie jest najgorszym sposobem uczenia się matematyki, bowiem mechaniczne zapamiętanie **blokuje możliwość późniejszego zrozumienia**. Jeśli pamięć zawiedzie lub reguła się pomyli, uczeń nie ma szansy na odtworzenie lub sprawdzenie danego fragmentu.

Ogólnie biorąc, **nauczanie behawioralne jest podające i wymagające**. Efektem takiego nauczania, które nie aktywizuje ucznia, bywa jedynie mierne reprodukowanie tego, co znajduje się w podręczniku lub co podał nauczyciel, bez należytego rozumienia i bez umiejętności elastycznego stosowania tego w sytuacjach życiowych.

Typowym przykładem różnicy między konstruktywizmem a behawioryzmem jest ich stosunek do **liczenia na palcach** przez dziecko.

Podjęcie behawiorystyczne akcentuje, że:

- palców dziecko może używać do rachowania tylko na samym początku nauki;
- później należy tego zakazywać, bowiem jest to infantylne przyzwyczajenie, które opóźnia pamięciowe opanowanie dodawania i odejmowania.

Zgodnie z podejściem konstruktywistycznym:

- liczenie na palcach jest ważnym etapem pośredniczącym między rachowaniem obiektów widzianych a rachowaniem obiektów wyobrażonych, to wstęp do rachowania w myśli;
- palce to dobrze znany dziecku zbiór zastępczy, który zawsze ma przy sobie;
- dziecko powinno móc używać palców do rachowania tak długo, jak mu to jest potrzebne;
- rachowanie na palcach nie uzależnia, bowiem jest pracochłonne i dziecko nie użyje palców, gdy zna wynik i jest go pewne;

- wiedza wywodząca się z rachowania na palcach jest osobistą wiedzą dziecka, do której zawsze może powrócić, gdy to okaże się potrzebne;
- później nieraz wystarczy dziecku popatrzeć na wyciągnięte dłonie.

Niestety zakazywanie liczenia na palcach często zdarza się w polskich szkołach. Jest to zjawisko szkodliwe. Niewłaściwy jest już sam fakt zakazywania dziecku czegoś, co jest mu potrzebne i matematycznie poprawne.

8. Prawo ucznia do błędu

Najbardziej jaskrawym przykładem różnicy między tradycyjną dydaktyką a podejściem konstruktywistycznym jest sposób traktowania błędów popełnianych przez ucznia.

Przeciętne dziecko przychodzi do szkoły ciekawe świata. Chce zadawać mnóstwo pytań.

Próbuje rozwiązywać dawane mu zadania. Niestety popełnia przy tym różne błędy, za które jest karane (głośną dezaprobatą w obliczu klasy, czasem wyśmianiem, nieraz wpisaniem negatywnej oceny). Powtarzanie się tej sytuacji ucisza dziecko, zabija jego wrodzoną aktywność poznawczą i gotowość do samodzielnego szukania odpowiedzi na postawione pytania.

Dydaktycy matematyki długo szukali takich metod nauczania, które zabezpieczyłyby uczniów przed popełnianiem błędów. Przy podejściu konstruktywistycznym przyjmuje się natomiast, że **błędy dziecka są rzeczą normalną, nieuniknioną** i w jakimś sensie czasem nawet pożądaną przy samodzielnym rozwiązywaniu problemów. Bez popełniania błędów nie ma uczenia się. **Uczeń musi mieć prawo do błędu.** Nauczyciel powinien pomóc dziecku przezwyciężyć jego błąd, ale w taki sposób, aby ono samo mogło uświadomić sobie, na czym błąd polegał. Nie jest to bynajmniej łatwe; dziecko musi mieć czas na samodzielne wykonanie odpowiednich czynności i przekonanie się, że jest inaczej, niż myślało. Musi to odbywać się w atmosferze życzliwości i tolerancji dla innego, charakterystycznego dla dzieci ujmowania rzeczywistości. Natomiast karanie ucznia za błąd lub wymuszanie rachunku poprawnego, lecz w danym momencie niezrozumiałego, powoduje szkody trudne do późniejszego naprawienia.

Błędy popełniane przez dziecko w trakcie uczenia się matematyki powinny być traktowane tak jak np. upadki przy nauce jazdy na nartach. Nie da się opanować jazdy na nartach bez wielokrotnego wywracania się. Podobnie nie sposób nauczyć się matematyki bez popełniania błędów, co powinno być traktowane jako coś naturalnego.

Jeśli ktoś chciałby krótko, poglądowo sformułować istotę podejścia konstruktywistycznego, może użyć trafnego hasła: **pozwólmy dzieciom działać i myśleć**. Nieraz łatwiej jest samemu wymyślić, jak można rozwiązać zadanie, niż śledzić cudze rozumowanie. Pozwólmy im – a nawet zachęcajmy je i organizujmy im to – by najpierw próbowali rozwiązywać zadanie po swojemu, nieporadnie czy nawet błędnie. Nie blokujmy im drogi przez zbyt wczesne lub zbyt natarczywe naprowadzanie na preferowany przez nas tok myślenia. Uczeń za swój błąd popełniony przy próbie znalezienia rozwiązania nie powinien w żadnym przypadku dostawać reprimendy od nauczyciela. Nie może bać się popełnienia błędu, bowiem strach przed zganieniem może spowodować wycofanie się nawet przy dość łatwych zadaniach. Jednakże nie można przechodzić do drugiej skrajności i chwalić ucznia, który napisał, że $7 + 4 = 12$. Należy raczej starać się, by uczeń sam (lub z pomocą nauczyciela czy kolegów) odkrył, co zrobił źle.

9. Zapis symboliczny

Język, którym przedstawia się zagadnienia matematyczne, ma zarówno postać wypowiedzi w zwykłym języku (np. polskim lub angielskim), jak i zapisów z użyciem specjalnych symboli matematycznych. Często niestety spotyka się **przedwczesne przechodzenie do zapisów symbolicznych, co wielu dzieciom utrudnia zrozumienie danego zagadnienia**. Nauka powinna najpierw odbywać się na poziomie ustnym, opierać się na sytuacjach konkretnych opisywanych w języku zbliżonym do potocznego. Uczeń powinien **uchwycić sens** (na swoim poziomie) danego pojęcia czy działania arytmetycznego, dopiero na tym można opierać zapis symboliczny.

Dziecku należy pozwolić mówić swoim naturalnym językiem o wykonywanych czynnościach, o rozwiązywaniu zadań i o obliczeniach. Wtedy może ono aktywnie działać i sensownie o tym myśleć. Jeżeli jednak zaczniemy wymuszać, by uczeń poprawnie wypowiadał się w języku dorosłych, to będzie się to odbywać często **kosztem wyłączenia myślenia** i ograniczenia się przez dziecko do odtwarzania tego, co już umie. Dziecko nie potrafi myśleć równocześnie o dwóch rzeczach: jak rozwiązać nowe dla niego zadanie i jak poprawnie o tym mówić w języku szkolnym.

Zgodnie z podstawową zasadą konstruktywizmu nowe pojęcie powinno być najpierw **kształtowane intuicyjnie**, wywodzone z życiowo **zrozumiałych** dla ucznia **sytuacji** i z czynności wykonywanych przez niego **na konkretach**. Na tym dopiero należy opierać **późniejszy zapis symboliczny**. Stopniowo, w długotrwałym procesie rozwojowym uczeń

powinien osiągnąć sprawność rachunkową. Niestety dość często ujawnia się zła tendencja do zbyt wczesnego wymagania od niego przejścia na wyższy poziom – na poziom zapisywania ściśle określonych symboli. Dzieje się tak m.in. dlatego, jest że pisanie symboli jest najłatwiejsze dla autora podręcznika i dla nauczyciela.

W klasie 1 zbyt wcześnie każe się uczniom zapisywać obliczenia dotyczące nowo poznanych działań. Już samo pisanie cyfr sprawia im dużą trudność i często pochłania tyle uwagi i energii, że często niewiele z tego zostaje na myślenie o tym, co piszą. Często spotykanym błędem jest wprowadzanie znaków działań (w szczególności $+$, $-$), zanim dzieci na konkretach (m.in. rachując na palcach) poznają dostatecznie wiele przykładów wyrażonych słownie (np. „3 i 2 to 5”). Jeśli tego jest zbyt mało i nowe abstrakcyjne działanie nie otrzyma niezbędnej podbudowy, część uczniów nie opanuje go należycie, będzie ratować się uczeniem na pamięć. Dostaną etykietkę niezdolnych do matematyki, co rozgrzeszy popełnione wcześniej błędy dydaktyczne.

Zgodnie z założeniami konstruktywistycznymi pierwszą fazą typowej jednostki metodycznej – zwłaszcza w klasie 1 – powinny być ćwiczenia z **manipulacyjnymi środkami dydaktycznymi** (naturalnymi, zaczerpniętymi z otoczenia dziecka lub wyprodukowanymi dla celów szkolnych) i próby samodzielnego rozwiązywania zadań. Nauczyciel powinien zorganizować, opisać sytuację zadaniową oraz zapoczątkować i ukierunkować czynności dzieci. Powinny one mieć okazję do rozmawiania o tym, co robią. Nie jest to łatwe organizacyjnie, w klasie robi się gwar, dzieciom trudno się skupić, nieraz środki dydaktyczne rozsypują się lub spadają.

Tradycyjnie rozumiana zasada poglądowości kładła nacisk na to, by nauczanie nie było werbalne, by uczeń mógł obejrzeć to, o czym się uczy. W przypadku matematyki nie chodzi jednak o oglądanie liczonych przedmiotów czy rysunków w podręczniku. Istotne są **nie te przedmioty, lecz ukierunkowane czynności**, które dziecko wykonuje, to one są źródłem pojęć matematycznych tworzących się w jego umyśle. Jeśli uczeń układa i liczy klocki lub posługuje się modelem wagi, to źródłem jego wiedzy nie są ani klocki, ani waga, lecz świadomie wykonywane przez niego czynności i rozmawianie o tym.

Hans Aebli podkreślał, że uczniowie wykazują większe zainteresowanie danym problemem, gdy mogą rozwiązywać go sami, a nie tylko przyglądać się, jak ktoś inny go rozwiązuje. Zdecydowanie wolą ruszać przedmiotami niż wyobrażać je sobie lub biernie obserwować czyjeś działanie. Na tym opiera się współczesne rozumienie zasady poglądowości w edukacji matematycznej. Chodzi o właściwe **respektowanie drogi między konkretem a abstrakcją**.

Dziecko zaczyna uczyć się dodawania, myśląc o rozmaitych sytuacjach statycznie, np. *Leżą na stole 4 zakrętki zielone i 3 czerwone. Ile jest ich razem?*, lub dynamicznie, np. *Leżą 4 zakrętki. Dokładam jeszcze 3. Ile będzie ich razem?* W drugim przypadku samo wykonuje te czynności i sprawdza, jaki jest wynik.

Dopóki dziecko posługuje się konkretnymi lub zbiorami zastępczymi i nie zapisuje symbolicznie dodawania, nie ma potrzeby ograniczania mu z góry wielkości liczb. Jeśli daje sobie radę, liczby mogą być większe od 10.

Zapis symboliczny typu $4 + 1 = 5$ powinien pojawić się dopiero wtedy, gdy uczniowie mają już należyte, wielomiesięczne **doświadczenie z dodawaniem na konkretach**. Tradycyjnie w polskich podręcznikach znak dodawania i znak równości pojawiały się w podręcznikach do klasy 1, gdy uczeń umiał pisać cyfry 1, 2, 3, 4, 5. Wtedy mógł już zapisać wystarczająco wiele przykładów:

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4, \quad 4 + 1 = 5, \quad 2 + 2 = 4, \quad 3 + 2 = 5.$$

Taka liczba przykładów jest **niezbędna**, aby móc wprowadzić ich **wspólne uogólnienie** i symbol nowego, abstrakcyjnego pojęcia matematycznego. Jeden czy dwa takie przykłady to zdecydowanie za mało, by dziecko ogarnęło sens nowego zapisu symbolami.

Odejmowanie uczeń powinien poznawać najpierw w kontekście **ubywania** (coś zabrano, zjedzono, podarowano, zabrano, stłukło się, zginęło, odsunięto na bok, zakryto, przekreślono).

Istotne jest, by dziecko rozumiało problem odejmowania w postaci dynamicznej historyjki typu: Było: Potem ubyło: Ile zostało?

Dziecko powinno uczyć się odejmowania najpierw na ruchomych konkretach, odsuwając je lub zakrywając, objaśniając to przy tym swoimi słowami i rachując, ile było na początku, ile ubyło i ile zostało. Szczególnie skutecznym zabiegiem jest zakrywanie odejmowanych przedmiotów lub fragmentów rysunków w podręczniku. Przykładowo – gdy ćwiczymy odejmowanie różnych liczb od 8, wystarczy ułożyć 8 żetonów:



Dziecko chce wiedzieć, ile jest $8 - 3$. Zakrywa ręką 3 żetony i liczy, ile zostało. Może powtarzać to wielokrotnie z tymi samymi 8 kółkami, zmieniając liczbę zakrywanych przedmiotów i patrząc, ile zostaje. Później wykonuje ono takie zakrywanie w myśli. „Zsuwam dwie

takie grupki razem – dodają. Rozsuwam i zakrywam jedną część – odejmuję. Znowu mogę zsunąć”. Ujawnia się tu związek dodawania z odejmowaniem na poziomie czynności.

Zapis symboliczny typu $5 - 3 = 2$ powinien pojawić się dopiero wtedy, gdy dziecko wystarczająco już **utrwali stosowanie zapisu dodawania** i gdy potrafi **odejmować na konkretnych** niewielkie liczby (w zakresie 5 lub 7), dając odpowiedzi słowne.

Wiadomo, że dodawanie **z przekroczeniem progu dziesiątkowego**, np. $8 + 5$, jest trudne dla dzieci. **Doliczanie** jest kłopotliwe, bowiem palców jest tylko 10. Można się uczyć **na pamięć** wszystkich tych sum $7 + 5 = 12$, $8 + 3 = 11$ itd. Takie właśnie postępowanie nakazywała dydaktyka behawiorystyczna. Natomiast tradycyjna polska metodyka nakazywała uczyć dzieci **obliczania tych sum na poziomie symbolicznym**, np.

$$7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12.$$

Dla większości dzieci był to bardzo trudny sposób obliczania, wymuszany przez szkołę. Uczeń ma tu wykonać w myśli trzy kolejne operacje arytmetyczne:

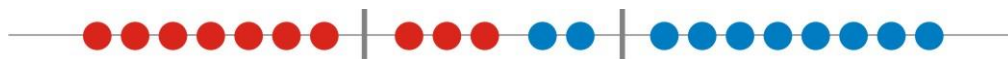
- dopełnić 7 do 10 i stwierdzić, że dodając 3 do 7, dostaje się 10;
- rozłożyć 5 na składniki – pierwszym składnikiem ma być liczba 3 uzyskana w pierwszym kroku, zatem 5 to 3 i 2;
- zamienić $7 + 5$ na $10 + 2$ w opisany wyżej sposób i otrzymać wynik 12.

Takie złożone obliczenie w postaci trzech kolejnych operacji jest zbyt trudne dla przeciętnego ucznia.

Mieliśmy więc trzy alternatywy, z których żadna nie stanowiła wystarczającej podstawy nauczania: doliczanie, które jest kłopotliwe na dłuższą metę, uczenie na pamięć lub zbyt trudne obliczanie na poziomie symboli. Jest jednak jeszcze jedna możliwość: użycie odpowiedniego liczydełka o wyraźnej strukturze matematycznej – to konkret, na którym **dziecko samo rachuje**. Na nitce liczydełka nanizanych jest 10 kulek czerwonych i 10 kulek niebieskich.



Uczeń odlicza 7 kulek od lewej, odsuwa je, zaznacza to miejsce, wkładając np. tekturkę |. Potem dolicza jeszcze 5 kulek i wkłada drugą tekturkę |. Otrzymuje wynik 12 (liczyć trzeba od lewej):



Jeśli spojrzeć na tych 12 kulek, rzuca się w oczy rozkład: 7 i 3, i 2. To ten sam rozkład, który mieliśmy wcześniej. Ale wtedy to było abstrakcyjne przekształcenie na poziomie symboli narzucone przez nauczyciela, a teraz dziecko samodzielnie odlicza kulki i wkłada tekturki, rozumiejąc, co robi. Gdy wykona dostatecznie dużo takich obliczeń, będzie później w stanie wykonać tego typu przegrupowanie w myśli, na kulkach wyobrażonych. Będzie to własna wiedza dziecka, rozumiana, dobrze ugruntowana w jego wcześniejszych czynnościach. To jego **wiedza osobista** zintegrowana z **wiedzą naukową**.

10. Konstruktywistyczne podejście do początków mnożenia

W programach edukacji wczesnoszkolnej nieraz spotyka się sformułowanie: wprowadzenie mnożenia jako skróconego zapisu dodawania jednakowych składników. W takim kontekście „wprowadzenie” będzie przedstawieniem uczniom mnożenia po raz pierwszy, jako nowego dla nich tematu. Otóż wbrew tradycyjnej metodyce uważam, że **nie należy zaczynać mnożenia od wyjaśniania, że mnożenie to wielokrotne dodawanie tej samej liczby**, byłoby to bowiem wprowadzanie nowego, trudnego pojęcia (mnożenia liczb) za pomocą innego abstrakcyjnego, symbolicznie przedstawionego i jeszcze nieutrwalonego pojęcia – wielokrotnego dodawania. Innymi słowy: trudną, nową abstrakcję objaśnia się tu za pomocą innej abstrakcji, co jest niezgodne z ogólnymi zasadami matematycznej edukacji wczesnoszkolnej.

Podjęcie konstruktywistyczne wymaga, aby każde nowe pojęcie wywodziło się ze zrozumiałych dla uczniów konkretnych, mających życiowy sens pytań i z prób odpowiedzi na te pytania poprzez manipulowanie przedmiotami. Może to być np. zadanie: *5 dzieci idzie na wycieczkę. Każde z nich ma dostać 3 bułki. Ilu bułek potrzeba?* Stwarzamy tu **sytuację problemową**. Nie mówi się dzieciom, w jaki sposób mają ją rozwiązać. Daje się jedyną wskazówkę – taką samą, jaką już nieraz przedtem dostawały – można wziąć jakieś żetony (nakrętki po sokach lub np. patyczki). To będą „bułki na niby”. Dzieci próbują rozwiązać zadanie, odpowiednio układając „bułki”. Układają grupki po 3 żetony, np. tak:



Następnie obliczają, ile jest tych wszystkich bułek: 3 i jeszcze 3, i 3, i 3, i 3 to razem 15. Trzeba więc przygotować 15 bułek. Nauczyciel podsumowuje to, mówiąc, że 5 razy po 3 to 15. W ten sposób czynnościowo, na konkretach uczniowie powinni rozwiązać wiele kolejnych zadań. Omawiają wszystko słownie, początkowo bez żadnego symbolu mnożenia.

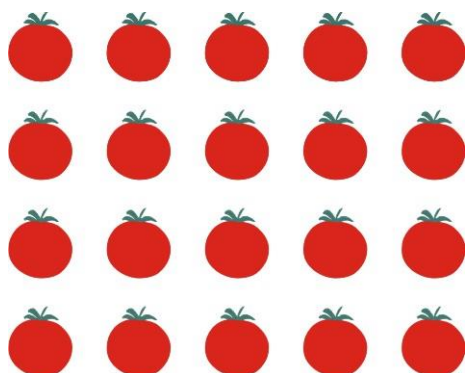
Zapis typu: $5 \cdot 3 = 15$ powinno się wprowadzać **dopiero wtedy**, gdy dzieci mają już pewne doświadczenie z takimi zadaniami i **rozumieją intuicyjny sens mnożenia**. Natomiast powiązanie tego zapisu z symbolicznie przedstawionym dodawaniem nie może pojawiać się wcześniej niż po kilku lekcjach i powinno być zapisywane w dwóch oddzielnych liniach, np.

$$3 \cdot 4 = 12,$$

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Pojedynczy zapis złożony typu $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$ jest istotnie bardziej zaawansowany i powinien pojawić się znacznie później.

Nauczanie mnożenia zaczyna się od sytuacji typu **tyle razy po tyle**, której przykładem jest zadanie o bułkach. Bardzo ważny jest też **szyk prostokątny**. Tak określamy podwójny układ rzędów poziomych i pionowych, takich jak prostokąt ułożony z kwadratowych kafelków lub np. regularny układ pomidorów w pudełku:



Liczbę tych pomidorów można obliczać na dwa sposoby:

- Liczymy **rzędy poziome** (jest ich 4) i pomidory w jednym poziomym rzędzie (jest ich po 5 w rzędzie); razem więc liczbę wszystkich pomidorów obliczamy jako *4 rzędy po 5 pomidorów*. Piszemy $4 \cdot 5 = 20$.
- Liczymy **rzędy pionowe** (jest ich 5) i pomidory w jednym pionowym rzędzie (jest ich po 4 w rzędzie), razem mamy więc *5 rzędów po 4 pomidory*, piszemy $5 \cdot 4 = 20$.

Zazwyczaj uczniom pokazuje się oba te sposoby, ilustrując to odpowiednimi gestami.

Wyciąga się stąd wniosek, że 4 razy po 5 to tyle samo co 5 razy po 4.

Takie rozumowanie można powtórzyć przy dowolnym szyku prostokątnym, licząc elementy danego układu dwoma sposobami: raz mnożąc liczbę elementów w rzędach poziomych przez liczbę rzędów, a drugi raz powtarzając tę procedurę z rzędami pionowymi. Ponieważ za każdym razem liczone są te same elementy, wynik musi być taki sam, możemy być tego

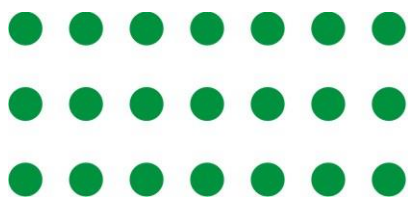
pewni nawet wtedy, gdy nie wiemy, ile wynosi ten iloczyn. Możemy np. wyobrazić sobie 18 rzędów poziomych po 24 kulki. Są to zarazem 24 pionowe rzędy po 18 elementów. Wiemy, że całkowita liczba kulek nie może zależeć od sposobu ich przeliczania (byleby każdy element był uwzględniony i żaden nie był liczony dwukrotnie), zatem każde z tych obliczeń musi dać ten sam wynik. Możemy być tego pewni, nawet gdy nie umiemy obliczyć iloczynu $18 \cdot 24$. Jeżeli dziecko w tego typu kontekście spontanicznie użyje słowa „musi”, to ujawni swe rozumienie istoty matematyki: pewnych rzeczy możemy być pewni bez bezpośredniego sprawdzania.

Podane tu rozumowanie, dotyczące dowolnych liczb naturalnych, pozwala na wyciągnięcie wniosku o **przemienności mnożenia** – gdy zmienimy kolejność czynników, iloczyn pozostanie taki sam.

Jak jednak pokazały badania z ostatniego ćwierćwiecza (m.in. prowadzone przez Bożenę Rożek w Krakowie), dzieci uczące się mnożenia **często nie rozumieją struktury poziomych i pionowych rzędów** w szyku prostokątnym, wobec tego podany powyżej argument w ogóle do nich nie dociera. Mogą zresztą mechanicznie stosować pokazaną im w szkole procedurę obliczania, ale odpowiednio ukierunkowana rozmowa i pewne popełniane błędy ujawniają naturę występujących trudności.

Przykładowo: uczeń klasy 2 ma obliczyć, ile jest pomidorów na powyższym rysunku. Liczy pomidory w górnym rzędzie: 1, 2, 3, 4, 5; liczy pomidory z lewej strony z góry na dół: 1, 2, 3, 4. Potem mnoży $4 \cdot 5$. Wygląda to poprawnie, ale okazuje się, że część tych dzieci nie jest świadoma, że licząc kulki z lewego brzegu, liczy zarazem poziome rzędy. Drugoklasiści mogą nie widzieć tych rzędów, bo nikt im nigdy tego nie pokazał, nikt im nie zwrócił na to uwagi. Nie wystarczą krótkie gesty nauczyciela, które są skuteczne jedynie wtedy, gdy uczeń rozumie już strukturę rzędów w takim szyku. Niezbędne są pewne samodzielne czynności dziecka.

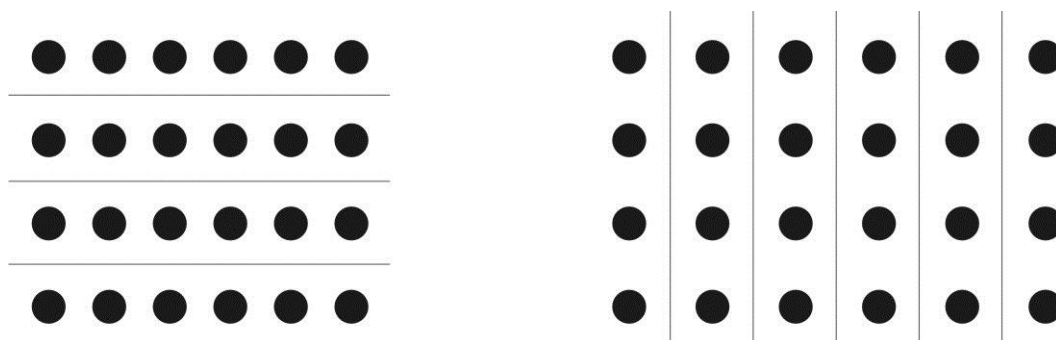
Oto prosty sposób wspomagania dzieci w konstruowaniu w ich umysłach podwójnej **struktury rzędów poziomych i pionowych** w szyku prostokątnym. Uczniowie dostają dwa identyczne rysunki z tym samym układem, np. 3 razy po 7 kulek:



Następnie lewy rysunek uczniowie rozcinają nożyczkami na 3 paski poziome, a prawy na 7 pasków pionowych:



Po lewej strony ujawniają się dziecku rzędy poziome, a po prawej – pionowe. Inną, późniejszą czynnością uczniów może być podział takich dwóch jednakowych układów kulek na części nie nożyczkami, lecz poprzez narysowanie poziomych lub pionowych linii oddzielających rzędy, np. w układzie 4 razy po 6 czarnych kulek wyglądałoby to tak:



Warto też, by dziecko wycięło dwa identyczne prostokąty narysowane na pokratkowanym papierze i analogicznie rozcięło jeden na paski poziome, a drugi na pionowe.

11. Tabliczka mnożenia

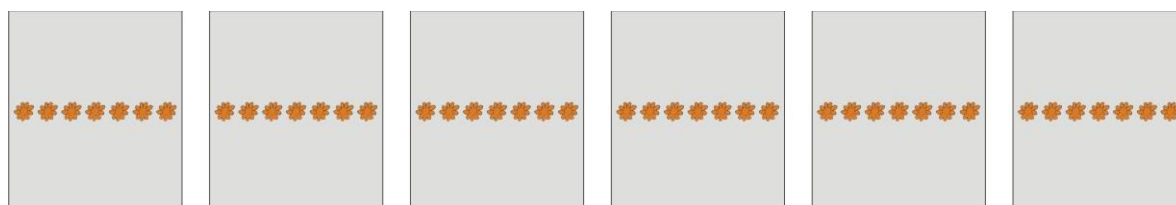
Naturalne i ważne jest pytanie, kiedy i w jaki sposób uczeń ma opanować pamięciowo tabliczkę mnożenia. Będzie to mu to niezbędnie potrzebne w bardziej zaawansowanych obliczeniach, np. przy mnożeniu liczb wielocyfrowych i przy ułamkach, a więc w klasie 4. Zgodnie z podstawą programową uczeń kończący klasę 3 „podaje z pamięci iloczyny w zakresie tabliczki mnożenia; sprawdza wyniki dzielenia za pomocą mnożenia”.

Behawioryzm lansował uczenie na pamięć obu tabliczek: **tabliczki dodawania** zawierającej wszystkie sumy liczb jednocyfrowych od $1 + 1$ do $9 + 9$ oraz **tabliczki mnożenia** zawierającej wszystkie iloczyny liczb jednocyfrowych od $1 \cdot 1$ do $9 \cdot 9$. W Polsce nie ma na szczęście tradycji pamięciowego opanowania tej pierwszej tabliczki.

Przy ujęciu konstruktywistycznym uczeń najpierw powinien przez odpowiednio długi czas sam obliczać iloczyny – w rozmaity sposób – i rozwiązywać wiele zadań. W ten sposób zapamięta przy okazji wiele iloczynów, zwłaszcza tych łatwiejszych, np. w zakresie 20.

Bardzo pomocne na pewnym etapie są kartoniki. Przykładowo uczeń ma do dyspozycji 10 kartoników, na każdym jest 7 kółek (lub np. 7 kwiatków). Pytamy: Ile jest 6 razy 7?

Uczeń układa 6 takich kartoników.



Patrząc na rysunki, może dodawać kolejno: 7, 14, 21, 28, 35, 42. Może też rozsunąć kartoniki po trzy. Będzie widział 3 razy po 7 kółek i osobno ponownie 3 razy po 7 kółek. Jeśli już pamięta, że $3 \cdot 7 = 21$, to wystarczy stwierdzić, że 21 i 21 to 42. Może też rozsunąć sześć kartoników inaczej: pięć i jeden, daje to 35 i 7 – też 42. W ten sposób dziecko opanowuje tabliczkę mnożenia elastycznie, spostrzegając wiele związków liczbowych, np. związek iloczynu $6 \cdot 7 = 42$ z iloczynem $3 \cdot 7 = 21$. Doskonali rachunek pamięciowy. Jeśli potem zapomni jakiś iloczyn, może go w ten sposób sobie obliczyć, nie jest bezradne. Jego wiedza staje się bogatsza, solidniejsza.

Rozsuniecie powyższych 6 kartoników na 3 kartoniki i 3 kartoniki odpowiada przekształceniu symbolicznemu opartemu na prawie **rozdzielności mnożenia względem dodawania**:

$$6 \cdot 7 = (3 + 3) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 21 + 21 = 42.$$

Około 30 lat temu z pomocą takich właśnie ciągów przekształceń na poziomie symbolicznym uczono trudniejszych iloczynów z tabliczki mnożenia w polskiej klasie 2. Okazało się to zdecydowanie za trudne dla wielu uczniów i w końcu z tego zrezygnowano. Natomiast pokazany powyżej sposób układania i rozsuwania kartoników to poglądowy, czynnościowy, zrozumiały dla ucznia sposób wykonania tego samego obliczenia. Żadne sformułowanie prawa rozdzielności nie jest do tego potrzebne. Przy trudniejszych iloczynach z tabliczki mnożenia da się na ogół tak rozsunąć kartoniki, aby nie trzeba było przekraczać progu dziesiątkowego przy dodawaniu (jak powyżej przy $21 + 21 = 42$). Jedynie przy iloczynach przez 9 przekroczenie progu pojawi się przy każdym rozsunięciu kartoników.

Jednakże iloczyny przez 9 łatwo obliczać w inny sposób, który objaśnię na przykładzie.

Chcemy np. obliczyć $7 \cdot 9$. Układamy do tego zadanie, np. *7 osób kupuje książeczki po 9 zł*.

Ile razem pieniędzy dostanie sprzedawca? Wyobraźmy sobie, że każda osoba kładzie 10 zł i dostaje 1 zł reszty. Sprzedawca łącznie dostaje więc 70 zł i wydaje 7 zł. Zatem obliczając koszt tych 7 książeczek po 9 zł, stwierdzamy, że $7 \cdot 9 = 70 - 7 = 63$.

Podobnie: $9 \cdot 9 = 90 - 9 = 81$, $8 \cdot 9 = 80 - 8 = 72$, $6 \cdot 9 = 60 - 6 = 54$, $5 \cdot 9 = 50 - 5 = 45$ itd.

Po takich różnorodnych ćwiczeniach uczeń będzie już pamiętał większość iloczynów liczb jednocyfrowych. Kilku najtrudniejszych (jak np. $8 \cdot 7$ czy $9 \cdot 6$) musi nauczyć się na pamięć, ale powinno się tego od niego wymagać dopiero wtedy, gdy już należycie rozumie, czym jest mnożenie, gdy zbierze wiele doświadczeń liczbowych.

12. Czy kwadrat jest prostokątem?

Dla matematyka ta kwestia jest oczywista. Od uczniów klas 4–6 oczekuje się rozumienia tego, że każdy kwadrat jest prostokątem, ale dla pierwszoklasisty może to być niepojęte. Kwadrat nie może być prostokątem, bo są to przecież **różne kształty**, wyglądają inaczej!

Dla dzieci w tym wieku zrozumienie, że kwadrat jest zarazem prostokątem, jest niedostępne, wymaga bowiem przejścia na istotnie wyższy poziom myślenia geometrycznego. Nie tylko dlatego, że wymaga to trudnego **pojęcia kąta**. Kwadrat jest prostokątem, bowiem ma 4 boki i 4 kąty proste, a to właśnie jest wymagane w definicji prostokąta. By to pojąć, nieodzowna jest (choćby intuicyjna) świadomość, że kwadrat nie jest czymś konkretnym, lecz figurą geometryczną określoną przez pewne własności (równe boki, kąty proste), abstrakcyjną konstrukcją myślową, nieistniejącą w rzeczywistym świecie. Dziecko traktuje figury całościowo, reprezentując je w myśli jako pewne obrazy. Figury widziane w rzeczywistości lub na ilustracjach są określane tą samą nazwą, gdy wyglądają tak samo. Uczeń ujmuje kwadrat jedynie w sytuacjach takich jak np. „ten klocek i ten kafelek to kwadraty”, „to okno ma kształt kwadratu”. Myślenie dziecka na tym poziomie opiera się na **percepcji**: to jest kwadrat, bo widzę, że to jest kwadrat. To część wiedzy osobistej dziecka.

Natomiast zgodnie z wiedzą naukową powinno się mówić, że kwadrat to prostokąt.

Ujawnia się tu poważny dylemat. Czy lepsze jest więc wymuszanie na uczniach niezgodnego z naturalnym ich myśleniem powtarzania za nauczycielem, że kwadrat jest prostokątem, czy też lepiej jest tolerować to ich błędne przekonanie, niezgodne z tym, czego będą się uczyć w klasach 4–6? Opowiedziałbym się za tym drugim, bowiem sądzę, że więcej szkody przynosi dzieciom powtarzanie czegoś, czego nie rozumieją, co jest sprzeczne z ich wiedzą osobistą, do czego nie dojrzały.

Kwestia ta jest delikatna, bo oczywiście nie wolno też nauczycielowi mówić błędnie, że kwadraty nie są prostokątami. Najlepiej więc unikać sytuacji wymagających zajęcia wyraźnego stanowiska.

13. Podsumowanie

Konstruktywistyczny punkt widzenia kładzie główny nacisk na sensowną aktywność ucznia, a mniejszy na jego wyniki na sprawdzianach. Zmienia to priorytety w praktyce szkolnej. Postulowane są odpowiednie zmiany metod nauczania. Dobrze jednak, gdy odbywa się to stopniowo, bowiem **szkoła nie powinna być miejscem radykalnych zmian**. Nie należy domagać się, by w zwykłej szkole, w której na ogół dominowało dotąd nauczanie w pełni podające, dzieci nagle zaczęły odkrywać matematykę pod kierunkiem nauczyciela. Nie da się (w skali masowej) bez odpowiedniego, starannego przygotowania przestawić dotychczasowego nauczania na zupełnie inny styl pracy. Pełna realizacja postulatów konstruktywizmu w zwykłych warunkach szkolnych, w ramach systemu klasowo-lekcyjnego nie jest łatwa, zwłaszcza w klasie 1 – właśnie wtedy, gdy jest to najbardziej dzieciom potrzebne.

Pomimo takich obiektywnych trudności organizacyjnych konstruktywizm jest ważnym drogowskazem dla nauczyciela. Należy starać się wprowadzać metody aktywizujące w sposób naturalny, bez forsowania ich wbrew możliwościom uczniów. Można je wdrażać nawet w przeciętnych warunkach szkolnych. Czynności dzieci trzeba starać się ukierunkować tak, by **były dla nich sensowne** i dawały im okazję do zbierania doświadczeń, będących niezbędną podbudową dalszej nauki. Nie wystarczy, że mają patyczki na stoliku lub powie im się, by grały w jakąś grę. Swobodna zabawa, choć ważna, sama w sobie nie wystarczy, by w umysłach dzieci należycie ukształtowały się pojęcia matematyczne. Zadaniem nauczyciela jest zorganizowanie trafnych sytuacji dydaktycznych, a potem poprowadzenie rozmowy z dziećmi tak, by dać im szansę zastanowienia się nad efektami swych manipulacji i rozmawiania o tym.

Dla dzieci w wieku 6–8 lat ogólne słowne objaśnianie, czego się od nich oczekuje, jest często niezrozumiałe, również przy ćwiczeniach polegających na manipulowaniu przedmiotami. Konieczne więc bywa **pokazanie tego na przykładach** i podejście do każdego stolika, a na to niestety jest mało czasu, gdy klasa jest zbyt liczna. Ponadto dzieci w tym wieku na ogół nie potrafią dyskutować w grupie o swoich pomysłach, wątpliwościach i trudnościach. Jest to łatwiejsze, gdy dorosły rozmawia z pojedynczym dzieckiem, a dużo trudniejsze, gdy jest ich

ponad dwadzieścioro, gdy wszyscy bardzo chcą coś powiedzieć i wszystkich powinno się wysłuchać, patrząc z bliska na to, co układają lub rysują.

Wielu nauczycieli ma zasadnicze trudności z elastycznym dostosowaniem się do reakcji dzieci, nieraz nieprzewidzianych, zaskakujących. Mimo to powinni starać się odchodzić od nauczania zbyt podającego, motywować dzieci do samodzielnego działania i **budzić w nich zaufanie do ich własnych możliwości**. Nauczyciel może stwarzać odpowiednie sytuacje zadaniowe z wykorzystaniem konkretów i zachęcać uczniów do rozmowy o tym, co robili i co zauważyli.

Na zakończenie podaję swój adres e-mailowy: semadeni@mimuw.edu.pl

Bibliografia

- Aebli H., (1982), *Dydaktyka psychologiczna*, wyd. 2, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Donaldson M., (1986), *Myślenie dzieci*, Warszawa: Wiedza Powszechna.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., (1994), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, wyd. 2, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Gruszczyk-Kolczyńska E. (red.), (2012), *O dzieciach uzdolnionych matematycznie. Książka dla rodziców i nauczycieli*, Warszawa: Nowa Era.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E., (2015), *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Kraków: Bliżej Przedszkola.
- Gruszczyk-Kolczyńska E. i in., (2009), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*, Warszawa: Edukacja Polska.
- Klus-Stańska D., Nowicka M., (2009), *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Ministerstwo Edukacji Narodowej, (2008), *Podstawa programowa z komentarzami. Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i technikum (matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka)*, Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.
- Piaget J., (1977), *Psychologia i epistemologia*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dn. 30 maja 2014 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2014 r. poz. 803).
- Semadeni Z., (2015), *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*, [w:] Semadeni Z. i in., *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna*, Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, s. 9–170.
- Szemińska A., (1981), *Rozwój pojęć matematycznych u dziecka*, [w:] Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, WSiP, wyd. 1 (wyd. 2: 1981), rozdz. 2.1–2.5.