

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(17 marca 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$. Wówczas $x = a - \sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b = (a - \sqrt{3})^2 + \sqrt{3} = (1 - 2a)\sqrt{3} + a^2 + 3, \quad \text{czyli} \quad (1 - 2a)\sqrt{3} = b - a^2 - 3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1 - 2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{1 - 2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1 - 2a = 0$. Wobec tego $a = \frac{1}{2}$, czyli $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania, jest to jedyna liczba o żądanej własności.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD . Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że jeżeli $KP = LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Ponieważ punkty L i N są środkami odpowiednio boków AD i CD trójkąta ACD , więc $LN = \frac{1}{2}AC$ oraz prosta LN jest równoległa do prostej AC . Analogicznie wykazujemy, że $MK = \frac{1}{2}AC$ oraz prosta MK jest równoległa do prostej AC .

Wobec tego $LN = MK$, a ponadto proste LN i MK są równoległe. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QLN = \sphericalangle PKM$, jako kąty naprzemianległe. Zatem trójkąty MKP i NLQ są przystające (cecha bok-kąt-bok). Stąd wniosek, że $\sphericalangle KPM = \sphericalangle LQN$, czyli proste MP i NQ są równoległe. Wobec tego proste AB i CD również są równoległe.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Udowodnij, że

$$d \geq \sqrt{a+b}.$$

Szkic rozwiązania

Niech x, y będą dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których $a = dx$, $b = dy$. Ponieważ d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b , więc liczby x i y są względnie pierwsze.

Skoro iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$, to istnieje dodatnia liczba całkowita z taka, że $(a + b) \cdot z = ab$. Stąd otrzymujemy

$$d(x + y) \cdot z = d^2xy, \quad \text{czyli} \quad (x + y) \cdot z = dxy.$$

To oznacza, że liczba dxy jest podzielna przez $x + y$.

Liczby $x+y$ i x są względnie pierwsze. Podobnie liczby $x+y$ i y . Wobec tego z podzielności $x+y \mid dxy$ wynika, że $x+y \mid d$. Stąd wniosek, że $d \geq x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2 \geq a+b$, czyli $d \geq \sqrt{a+b}$.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n + 2}$$

na n -tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy liczbę $\sqrt{100^n + 2}$ przez a . Udowodnimy, że w zapisie dziesiętnym liczby a , na *każdym* miejscu od pierwszego do n -tego po przecinku, jest cyfra 0. W tym celu wskażemy taką dodatnią liczbę całkowitą k , że $k < a < k + \frac{1}{10^n}$.

Zauważmy, że $a = \sqrt{100^n + 2} > \sqrt{100^n}$, czyli $a > 10^n$. Z drugiej strony

$$a^2 = 100^n + 2 < 100^n + 2 + \frac{1}{100^n} = \left(10^n + \frac{1}{10^n}\right)^2, \quad \text{a zatem} \quad a < 10^n + \frac{1}{10^n}.$$

Podsumowując, $10^n < a < 10^n + \frac{1}{10^n}$, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC = a$, $AD = b$. Na krawędziach AB , AC , DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K , L , M , N , że

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC} = \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K , L , M , N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{skąd} \quad KL = BC \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN , NM , MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

