VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(16 marca 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a, b, c spełniają warunek $a+b+c=bc$. Udowodnij, że liczba $(a+b)(a+c)$ jest podzielna przez 4.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równość $a+b+c=bc$, otrzymujemy

$$a+b=bc-c=c(b-1) \quad \text{oraz} \quad a+c=bc-b=b(c-1).$$

Stąd wynika, że

$$(a+b)(a+c)=c(b-1)b(c-1)=(b-1)b(c-1)c.$$

Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, a zatem obie liczby $(b-1)b$ oraz $(c-1)c$ są podzielne przez 2. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 4, co kończy rozwiązanie zadania.

---

2. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że wśród uczestników przyjęcia istnieje osoba A, która nie zna przynajmniej dwóch innych osób B i C. Wówczas wśród osób A, B i C nie można wskazać takiej, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Opisany przypadek jest zatem sprzeczny z warunkami zadania, skąd wniosek, że każdy uczestnik przyjęcia zna wszystkich innych lub nie zna dokładnie jednej z pozostałych osób.

Zauważmy, że w takiej sytuacji ludzi, którzy się nie znają, możemy połączyć w pary. Gdyby nie istniała osoba, znająca wszystkich pozostałych, to każdy z obecnych należałby do jakiejś pary. Jest to jednak niemożliwe, gdyż liczba uczestników przyjęcia jest nieparzysta. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

---

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=120°$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że $AP=PQ=QB$. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ=90°$.

Szkic rozwiązania

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu Q względem punktu M. Punkt M jest wówczas środkiem przekątnych AB i DQ czworokąta $ADBQ$. Wobec tego czworokąt ten jest równoległobokiem.

Skoro proste AD i BQ są równoległe, to $\sphericalangle DAP=180°-\sphericalangle ACB=180°-120°=60°$. Ponadto $AD=QB=AP$. Trójkąt ADP jest więc równoramienny, a jeden z jego kątów ma miarę $60°$. Stąd wynika, że jest to trójkąt równoboczny. Wobec tego $PD=AP=PQ$, co z kolei oznacza, że trójkąt DQP jest równoramienny. Ponieważ punkt M jest środkiem podstawy DQ tego trójkąta, więc odcinek PM jest jego wysokością, a zatem $\sphericalangle PMQ=90°$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Liczby a, b, c, d są większe od 2. Wykaż, że co najmniej dwie spośród liczb

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{d}, \quad \frac{cd}{a}, \quad \frac{da}{b}$$

są większe od 2.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba a jest nie mniejsza od każdej z pozostałych liczb b, c i d. Wówczas

$$\frac{a}{c} \geqslant 1, \quad \text{a ponieważ} \quad b > 2, \quad \text{więc} \quad \frac{ab}{c} > 2.$$

Analogicznie otrzymujemy $\frac{da}{b} > 2$, co kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawy stanowią sześciokąty $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$. Na ścianach bocznych $ABB'A'$, $CDD'C'$ i $EFF'E'$ graniastosłupa, po jego zewnętrznej stronie, zbudujmy ostrosłupy czworokątne $ABB'A'P$, $CDD'C'Q$ oraz $EFF'E'R$ tak, aby otrzymana bryła była siedemnastościanem wypukłym. Skonstruowany w ten sposób wielościan ma nieparzystą liczbę ścian i w każdym jego wierzchołku schodzą się 4 krawędzie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego