Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria VII (styczeń 2013) — rozwiązania zadań

31. *Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej* n *liczba* $(3n)!$ *jest podzielna przez* $n!\cdot(2n+1)!$.

Rozwiązanie

Sposób I

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\left[\frac{N}{p^4}\right]+\ldots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Dowód lematu

Policzmy najpierw, ile liczb spośród $1,2,\ldots,N$ jest podzielnych przez p. Są to liczby postaci $k\cdot p$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą spełniającą nierówność $k\cdot p\leqslant N$, czyli jedną z liczb $1,2,\ldots,\left[\frac{N}{p}\right]$. Zatem jest ich $\left[\frac{N}{p}\right]$. Podobnie dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej l, przez p^l dzieli się $\left[\frac{N}{p^l}\right]$ spośród liczb $1,2,\ldots,N$ (w szczególności, gdy $p^l>N$, takich liczb nie ma). W celu wyznaczenia wykładnika czynnika p w rozkładzie na czynniki pierwsze $N!$, musimy zliczyć liczby podzielne przez p, w tym dwukrotnie te podzielne przez p^2, trzykrotnie te podzielne przez p^3 itd. Zatem szukany wykładnik wynosi $\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\left[\frac{N}{p^4}\right]+\ldots$, co kończy dowód lematu.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Aby wykazać podaną w treści zadania podzielność, wystarczy wykazać, że dowolna liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby $n!\cdot(2n+1)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym niż do rozkładu liczby $(3n)!$.

Na mocy lematu, dla rozwiązania zadania wystarczy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{2n+1}{p}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^2}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^3}\right]+\ldots\leqslant\left[\frac{3n}{p}\right]+\left[\frac{3n}{p^2}\right]+\left[\frac{3n}{p^3}\right]+\ldots$$

Wystarczy, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $k\geqslant 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{2n+1}{k}\right]\leqslant\left[\frac{3n}{k}\right]. \qquad (1)$$

Podzielmy liczbę n przez k z resztą, otrzymując $n=kq+r$, gdzie q jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $0\leqslant r\leqslant k-1$. Wtedy

$$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{2n+1}{k}\right]=q+2q+\left[\frac{2r+1}{k}\right]=3q+\left[\frac{2r+1}{k}\right]$$

oraz
$$\left[\frac{3n}{k}\right] = 3q + \left[\frac{3r}{k}\right].$$
Nierówność (1) sprowadza się więc do nierówności
$$\left[\frac{2r+1}{k}\right] \leqslant \left[\frac{3r}{k}\right]. \tag{2}$$
Gdy $r=0$, obie strony powyższej nierówności są zerami, ponieważ $k \geqslant 2$. Natomiast dla $r \geqslant 1$ nierówność (2) wynika bezpośrednio z nierówności $2r+1 \leqslant 3r$.

Sposób II

Przekształcamy iloraz danych w zadaniu liczb, korzystając z wzoru na współczynnik dwumianowy:
$$\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n+1)!} = \frac{(3n)!\cdot(2n+1-2n)}{n!\cdot(2n+1)!} = \frac{(3n)!\cdot(2n+1)}{n!\cdot(2n+1)!} - \frac{(3n)!\cdot 2n}{n!\cdot(2n+1)!} =$$
$$= \frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!} - \frac{(3n)!\cdot 2}{(n-1)!\cdot(2n+1)!} = \binom{3n}{n} - 2\cdot\binom{3n}{n-1}.$$
Ponieważ współczynniki dwumianowe są liczbami całkowitymi, powyższa liczba jest całkowita, co z kolei jest równoważne dowodzonej podzielności.

---

32. *Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par nieujemnych liczb całkowitych n, k, gdzie $n \geqslant k+2$, spełniających zależność*
$$3\cdot\binom{n}{k} = \binom{n}{k+2}.$$

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na wartość współczynnika dwumianowego, zapisujemy dane równanie w postaci
$$3\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k-2)!},$$
co po uproszczeniu prowadzi kolejno do:
$$\frac{3}{(n-k-1)\cdot(n-k)} = \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)},$$
$$3\cdot(k+1)\cdot(k+2) = (n-k-1)\cdot(n-k),$$
$$3\cdot\left(\left(k+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(n-k-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$
$$3\cdot\left((2k+3)^2-1\right) = (2n-2k-1)^2-1,$$
$$(2n-2k-1)^2 - 3\cdot(2k+3)^2 = -2.$$
Zadanie sprowadza się więc do znalezienia nieskończenie wielu rozwiązań równania
$$x^2 - 3y^2 = -2, \tag{3}$$
w liczbach nieparzystych
$$x \geqslant 3 \quad \text{oraz} \quad y \geqslant 3. \tag{4}$$
Wystarczy wówczas przyjąć
$$k = \frac{y-3}{2} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{x+1+2k}{2} = \frac{x+y-2}{2}.$$

Zauważmy, że dowolne liczby całkowite x, y spełniające równanie (3) są tej samej parzystości. Nie mogą być jednak obie parzyste, gdyż wtedy lewa strona równania (3) byłaby podzielna przez 4 i nie mogłaby być równa -2. Zatem wszystkie rozwiązania tego równania to rozwiązania w liczbach nieparzystych.

Wzorując się na przykładzie 2 z dodatku tematycznego Ligi OMG *Opowieści o indukcji* oraz na rozwiązaniu zadania 28 z Ligi OMG (seria VI, grudzień 2012), szukamy rozwiązań (x,y) równania (3) określonych wzorem

$$x+y\sqrt{3}=\left(a+b\sqrt{3}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{3}\right)^i,$$

gdzie i jest dodatnią liczbą całkowitą, a niezerowe liczby całkowite a, b, c, d są tak dobrane, aby

$$a^2-3b^2=-2 \quad \text{oraz} \quad c^2-3d^2=1.$$

Zauważmy, że rozwiązaniem równania (3) jest para $(x,y)=(1,1)$, nie spełnia ona jednak nierówności (4). Te obserwacje prowadzą do równości

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=-2.$$

Można zatem przyjąć $a=b=1$.

Rozważając równanie $c^2-3d^2=1$, znajdujemy rozwiązanie $(c,d)=(2,1)$, co można wyrazić jako

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1.$$

Niech teraz dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej i liczby x_i oraz y_i będą takimi dodatnim liczbami całkowitymi, że

$$x_i+y_i\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^i.$$

Wówczas zachodzi równość

$$x_i-y_i\sqrt{3}=\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^i,$$

skąd

$$x_i^2-3y_i^2=\left(x_i+y_i\sqrt{3}\right)\cdot\left(x_i-y_i\sqrt{3}\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^i\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^i=$$
$$=\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^i=-2\cdot 1^i=-2,$$

a zatem para liczb $(x,y)=(x_i,y_i)$ spełnia równanie (3). Pozostaje udowodnić warunek (4).

Ponieważ dla każdej dodatniej liczby całkowitej i zachodzi równość

$$x_{i+1}+y_{i+1}\sqrt{3}=\left(x_i+y_i\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right),$$

liczby x_i, y_i spełniają równania rekurencyjne

$$x_{i+1}=2x_i+3y_i \quad \text{oraz} \quad y_{i+1}=x_i+2y_i. \tag{5}$$

Para $(x,y)=(x_1,y_1)=(5,3)$ spełnia nierówności (4), a z rekurencji (5) wynika, że ciągi (x_i) oraz (y_i) są rosnące.

Tym samym wykazaliśmy istnienie nieskończenie wielu par liczb (n,k) spełniających warunki zadania.

Uwagi

Trzy najmniejsze pary liczb (n,k) otrzymane metodą zaprezentowaną w rozwiązaniu to $(3,0)$, $(14,4)$ oraz $(55,19)$.

Można udowodnić, że skonstruowane pary (n,k) to wszystkie rozwiązania zagadnienia podanego w treści zadania.

---

33. *Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia następujące warunki: $BD=CE$, $DF=EA$, $FB=AC$. Wykaż, że symetralne boków BC, DE, FA przecinają się w jednym punkcie.*

Rozwiązanie

Lemat 1.

Każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, symetrią z poślizgiem (czyli złożeniem symetrii z przesunięciem o wektor równoległy do osi symetrii) lub obrotem.

Dowód lematu 1 można znaleźć w książce H.S.M. Coxetera „Wstęp do geometrii dawnej i nowej”.

Lemat 2.

Niech Y będzie obrazem punktu X przy przekształceniu będącym złożeniem symetrii względem osi k z przesunięciem o wektor v równoległy do prostej k. Wówczas środek odcinka XY należy do prostej k.

Dowód lematu 2.

Niech Z będzie obrazem punktu X w symetrii względem prostej k. Wówczas środek odcinka XZ należy do k. Odcinek łączący środki odcinków XZ i XY jest równoległy do odcinka ZY, więc również do wektora v i w konsekwencji także do prostej k. W takim razie środek odcinka XY też należy do prostej k, co kończy dowód lematu 2.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Z danych w zadaniu równości odcinków wynika, że trójkąty BDF i CEA są przystające. W takim razie istnieje izometria, przekształcająca punkty B, D, F odpowiednio na punkty C, E, A. Z lematu 1 wiemy, że izometria ta jest przesunięciem, symetrią z poślizgiem lub obrotem.

Przypuśćmy, że jest to przesunięcie. Odcinki BC, DE i FA są wtedy równoległe do wektora przesunięcia. Ponieważ w sześciokącie boki BC i DE nie mogą zawierać się w jednej prostej, więc z ich równoległości oraz wypukłości kątów sześciokąta wynika, że suma kątów wewnętrznych przy wierzchołkach C i D wynosi $180°$. Podobnie dowodzimy, że sumy kątów przy wierzchołkach E i F oraz A i B wynoszą po $180°$. Otrzymaliśmy sprzeczność z faktem, że suma wszystkich kątów w sześciokącie wynosi $720°$.

Przypuśćmy teraz, że rozważana izometria jest symetrią z poślizgiem. Oznaczmy środki odcinków BC, DE i FA odpowiednio przez K, L i M. Z lematu 2 otrzymujemy, że punkty K, L i M leżą na jednej prostej. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt L należy do odcinka KM. Z wypukłości sześciokąta wiemy, że wnętrze odcinka KM zawiera się we wnętrzu sześciokąta. W takim razie punkt L leży we wnętrzu sześciokąta, co jest niemożliwe.

Rozważana izometria jest więc obrotem wokół pewnego punktu O. Skoro punkt C jest obrazem punktu B przy tym obrocie, to spełniona jest równość $OB=OC$. Stąd wynika, że symetralna odcinka BC przechodzi przez punkt O. Podobnie, symetralne odcinków DE i FA przechodzą przez punkt O, co kończy dowód.

---

34. *Dany jest czworościan $ABCD$. Punkty A', B' i C' leżą odpowiednio na krawędziach AD, BD i CD. Odcinki BC' i CB' przecinają się w punkcie K, odcinki CA' i AC' — w punkcie L, natomiast odcinki AB' i BA' — w punkcie M. Udowodnij, że proste AK, BL i CM mają punkt wspólny.*

Rozwiązanie

Proste AK i BL leżą w płaszczyźnie ABC' i nie są równoległe, zatem mają punkt wspólny S. Zauważmy, że punkt S leży w płaszczyźnie ACB', gdyż należy do niej cała prosta AK. Analogicznie stwierdzamy, że punkt S leży w płaszczyźnie BCA'.

Skoro punkty S, M i C należą do obu tych płaszczyzn, to należą do prostej, wzdłuż której te dwie płaszczyzny się przecinają, są więc współliniowe. Stąd proste AK, BL i CM przecinają się w punkcie S.

35. *Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d spełniających równanie*

$$a^4+b^{44}+c^{50}=d^4$$

oraz warunek NWD$(a,b,c,d)=1$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $a=n-1$ oraz $d=n+1$. Wówczas

$$d^4-a^4=8n^3+8n.$$

Przy tym $\mathrm{NWD}(a,d)=1$, o ile n jest liczbą parzystą.

Podstawiając $n=2^{41}\cdot m^{44}$, otrzymujemy $8n=(2m)^{44}$, możemy więc przyjąć $b=2m$.

Pozostaje dobrać liczbę m tak, aby

$$c^{50}=8n^3=2^{126}\cdot m^{132}.$$

Po podstawieniu $m=2^p\cdot k^q$, powyższe równanie przyjmuje postać

$$c^{50}=2^{126}\cdot(2^p\cdot k^q)^{132}=2^{126+132p}\cdot k^{132q}.$$

Wystaczy tak wybrać p oraz q, aby wykładniki $126+132p$ oraz $132q$ były podzielne przez 50. Od razu widzimy, że powyższy warunek jest spełniony przez $q=25$, natomiast wobec

$$126+132p=3\cdot(42+44p)\equiv 6\cdot(-4-3p) \pmod{50}$$

liczbą spełniająca nasz warunek jest $p=7$.

To prowadzi do

$$c=2^{21}\cdot k^{66}.$$

Ponieważ $m=2^7\cdot k^{25}$, otrzymujemy $b=2^8\cdot k^{25}$. Ponadto

$$n=2^{41}\cdot m^{44}=2^{41}\cdot\left(2^7\cdot k^{25}\right)^{44}=2^{41+7\cdot 44}\cdot k^{25\cdot 44}=2^{349}\cdot k^{1100},$$

skąd

$$a=2^{349}\cdot k^{1100}-1 \quad\text{oraz}\quad d=2^{349}\cdot k^{1100}+1.$$

Ponieważ podane wyżej wzory dla każdej liczby całkowitej dodatniej k określają rozwiązanie (a,b,c,d) danego w treści zadania równania, udowodniliśmy, że rozwiązań tych jest nieskończenie wiele.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego