VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(5 stycznia 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych spełniających warunki

$$a<b<2013 \quad \text{oraz} \quad a+b=4020\,.$$

Szkic rozwiązania

Ponieważ $a+b=4020$, więc $a=4020-b$. Korzystając z nierówności $a<b$, otrzymujemy $4020-b<b$. Stąd wynika, że $4020<2b$, czyli $2010<b$.

Wobec tego $2010<b<2013$, a ponieważ liczba b jest całkowita, więc $b=2011$ lub $b=2012$. Wstawiając uzyskane wartości b do równości $a=4020-b$, dostajemy kolejno $a=2009$ lub $a=2008$.

Pozostaje sprawdzić, że obie otrzymane pary $(a,b)=(2009,2011)$ i $(a,b)=(2008,2012)$ spełniają warunki zadania.

---

2. Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Taki trójkąt istnieje. Pokażemy, jak go skonstruować.

Rozważmy trójkąt prostokątny MBC, którego przyprostokątne BM i CM mają odpowiednio długości 15 i 20. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $BC=25$. Niech A będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CM.

Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Długości boków trójkąta ABC są liczbami całkowitymi. Również długość wysokości CM jest liczbą całkowitą. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny ($AC=BC$), więc pozostałe dwie wysokości tego trójkąta są równe. Oznaczmy je przez h. Obliczając na dwa sposoby pole S trójkąta ABC, uzyskujemy

$$\frac{AB\cdot CM}{2}=S=\frac{BC\cdot h}{2}, \quad \text{skąd} \quad h=\frac{AB\cdot CM}{BC}=\frac{30\cdot 20}{25}=24\,.$$

Pozostaje uzasadnić, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Ponieważ trójkąt MBC jest prostokątny, więc $\sphericalangle CBM<90^\circ$, a zatem kąty CBA i CAB są ostre. Ponadto, przyprostokątna BM trójkąta MBC jest krótsza od przyprostokątnej CM. Wobec tego $\sphericalangle BCM<\sphericalangle CBM$, skąd wynika, że $\sphericalangle BCM<45^\circ$, czyli $\sphericalangle ACB=2\cdot\sphericalangle BCM<90^\circ$.

---

3. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a\cdot\sqrt{b}+b\cdot\sqrt{a}+1>3ab\,.$$

Szkic rozwiązania

Dodatnia liczba b spełnia nierówność $b<1$. Wobec tego $\sqrt{b}>b$, a zatem $a\cdot\sqrt{b}>ab$. Analogicznie otrzymujemy $b\cdot\sqrt{a}>ab$. Ponadto, skoro obie liczby a, b są dodatnie i mniejsze od 1, więc $1>ab$. Stąd ostatecznie uzyskujemy

$$a\cdot\sqrt{b}+b\cdot\sqrt{a}+1>ab+ab+ab=3ab\,,$$

co należało wykazać.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny, jest równa 3.

Przypuśćmy, że płaszczyznę można pomalować przy użyciu czterech kolorów w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Wybierzmy cztery punkty różnych kolorów: C – czerwony, Z – zielony, N – niebieski oraz P – pomarańczowy.

Możliwe są dwa przypadki.

(1) Proste CZ i NP nie są równoległe. Oznaczmy przez X punkt ich przecięcia. Wówczas, skoro punkt X leży na prostej CZ, to musi on być albo czerwony, albo zielony. Z drugiej strony, punkt X leży na prostej NP, więc jest on albo niebieski, albo pomarańczowy. Jednak obu tych warunków pogodzić się nie da.

(2) Proste CZ i NP są równoległe. Wówczas punkty C, Z, N, P są wierzchołkami trapezu. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że przekątnymi tego trapezu są proste CN i ZP oraz oznaczmy przez X punkt przecięcia tych przekątnych. Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że skoro punkt X leży na prostej CN, to jest on koloru czerwonego lub niebieskiego. Z drugiej strony, punkt X leży na prostej ZP, więc jest on zielony lub pomarańczowy. Te dwa warunki jednak nie mogą być spełnione jednocześnie.

Sprzeczność otrzymana w obu przypadkach dowodzi, że nie można pomalować punktów płaszczyzny czterema kolorami w żądany sposób.

Wskażemy teraz pokolorowanie punktów płaszczyzny trzema kolorami, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa.

Rozważmy punkt A i prostą k, przechodzącą przez ten punkt. Punkt A pomalujmy na czerwono, wszystkie inne punkty prostej k na zielono, a pozostałe punkty płaszczyzny na niebiesko. Każda prosta zawiera wówczas punkty jednego lub dwóch kolorów.

---

5. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p,q), dla których liczba p^2+pq+q^2 jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Rozważmy najpierw przypadek $p \geqslant q$. Niech a będzie taką nieujemną liczbą całkowitą, że $p^2+pq+q^2=a^2$. Wówczas

$$(p+q)^2-a^2=pq, \quad \text{czyli} \quad (p+q+a)(p+q-a)=pq.$$

Ponieważ liczby p i q są pierwsze oraz $p+q+a \geqslant p+q-a$, więc

$$\begin{cases} p+q+a=p \\ p+q-a=q \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p+q+a=pq \\ p+q-a=1. \end{cases}$$

Pierwszy z powyższych układów nie może być spełniony, gdyż $p+q+a>p$.

Z kolei dodając stronami równania drugiego układu, uzyskujemy $2p+2q-1=pq$, co po przekształceniach przybiera postać $(p-2)(q-2)=3$. Liczby $p-2$ i $q-2$ są nieujemne oraz $p-2 \geqslant q-2$. Stąd wniosek, że $p-2=3$, $q-2=1$, czyli $p=5$, $q=3$. Pozostaje sprawdzić, że otrzymana para $(p,q)=(5,3)$ spełnia warunki zadania.

Analogicznie dla $p \leqslant q$ uzyskujemy parę $(p,q)=(3,5)$, która także spełnia warunki zadania.
