Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria III (wrzesień 2012) — rozwiązania zadań

---

11. *Lech, Czech i Rus konkurują o rękę królewny. Król usypał na środku komnaty stos złożony z 2012 dukatów i nakazał konkurentom kolejno dzielić stosy dukatów na mniejsze, jednak przesądny król zabronił dzielić stosów złożonych z 13 dukatów. W jednym posunięciu konkurent wybiera więc dowolny stos zawierający co najmniej 2 dukaty, ale niezawierający dokładnie 13 dukatów i dzieli go dowolnie na dwa niepuste stosy. Swoje posunięcia konkurenci wykonują cyklicznie: Lech, Czech, Rus, Lech, Czech, Rus,...*

Król obiecał rękę królewny temu, kto jako ostatni dokona podziału stosu dukatów.

Czy któryś z konkurentów może zapewnić sobie rękę królewny niezależnie od posunięć pozostałych konkurentów? Jeżeli tak, to który i jak powinien on postępować w trakcie rozgrywki?

Rozwiązanie

W końcowej pozycji, kiedy nie można już dokonać podziału żadnego stosu zgodnie z narzuconymi przez króla regułami, każdy stos zawiera jednego dukata lub 13 dukatów. Niech n będzie liczbą stosów zawierających 13 dukatów. Wówczas pozostałych $2012-13n$ dukatów leży na stosach złożonych z jednej monety. Zatem łączna liczba stosów jest równa

$$n+(2012-13n)=2012-12n.$$

Ponieważ każdy ruch zwiększa liczbę stosów o 1, a na początku rozgrywki był jeden stos, liczba posunięć wykonanych przez konkurentów jest równa

$$2012-12n-1=2011-12n\equiv 1 \pmod 3.$$

Stąd wynika, że ostatni ruch wykonał ten sam konkurent, który rozpoczął grę, czyli Lech.

Odpowiedź

Ręka królewny przypadnie Lechowi niezależnie od przebiegu rozgrywki.

---

12. *Wyznacz wszystkie czwórki kolejnych liczb całkowitych dodatnich, dla których pierwiastek kwadratowy iloczynu ma na pierwszym miejscu po przecinku cyfrę parzystą.*

Rozwiązanie

Niech n będzie najmniejszą z czwórki liczb. Zauważmy, że wówczas

$$n(n+3)=n^2+3n=(n^2+3n+1)-1$$

oraz

$$(n+1)(n+2)=n^2+3n+2=(n^2+3n+1)+1.$$

Stąd wynika, że

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1.$$

Dla $n=1$ iloczyn czterech kolejnych liczb jest równy 24. Mamy wówczas

$$4,8=\sqrt{23,04}<\sqrt{24}<\sqrt{24,01}=4,9\,,$$

skąd wynika, że pierwiastek kwadratowy tego iloczynu ma po przecinku cyfrę 8.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Niech $N=n^2+3n+1$. Wówczas dla $n\geqslant 2$ mamy $N\geqslant 11$. W takim razie zachodzą następujące nierówności:

$$N-\frac{1}{10}=\sqrt{N^2-\frac{N}{5}+\frac{1}{100}}\leqslant\sqrt{N^2-\frac{11}{5}+\frac{1}{100}}=\sqrt{N^2-2,19}<\sqrt{N^2-1}<\sqrt{N^2}=N.$$

Skoro $n(n+1)(n+2)(n+3)=N^2-1$, to pierwiastek kwadratowy tego iloczynu ma po przecinku cyfrę 9.

Odpowiedź

Jedyną czwórką liczb spełniającą warunki zadania jest czwórka $(1,2,3,4)$.

---

13. *Dana jest liczba pierwsza p oraz zbiór złożony z $p-1$ różnych liczb całkowitych dodatnich niepodzielnych przez p.*

Udowodnij, że z tego zbioru można wybrać niepusty podzbiór liczb o iloczynie dającym przy dzieleniu przez p resztę 1.

Rozwiązanie

Niech $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{p-1}$ będą danymi liczbami. Rozważmy p iloczynów

$$P_k=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ldots\cdot n_k$$

dla $k=0,1,2,3,\ldots,p-1$, przy czym przyjmujemy, że $P_0=1$.

Ponieważ liczby $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{p-1}$ są niepodzielne przez liczbę pierwszą p, iloczyny P_i również są niepodzielne przez p. Każdy z tych iloczynów przy dzieleniu przez p daje więc jedną z $p-1$ niezerowych reszt, a zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, pewne dwa iloczyny dają przy dzieleniu przez p taką samą resztę. Niech P_i oraz P_j, gdzie $i<j$, będą tymi iloczynami. Wówczas

$$P_i\equiv P_j \pmod p,$$

czyli

$$P_i\equiv P_i\cdot n_{i+1}\cdot n_{i+2}\cdot n_{i+3}\cdot\ldots\cdot n_j.$$

Zatem iloczyn

$$P_i\cdot(n_{i+1}\cdot n_{i+2}\cdot n_{i+3}\cdot\ldots\cdot n_j-1)$$

jest podzielny przez p. Skoro pierwszy czynnik powyższego iloczynu nie jest podzielny przez p, to przez p dzieli się drugi czynnik, a to oznacza, że iloczyn $n_{i+1}\cdot n_{i+2}\cdot n_{i+3}\cdot\ldots\cdot n_j$ przy dzieleniu przez p daje resztę 1. To kończy rozwiązanie zadania.

---

14. *Kule ω_1, ω_2 i ω_3 o promieniach odpowiednio 3, 4 i 12 są parami styczne zewnętrznie. Pewna płaszczyzna jest styczna do kuli ω_1 w punkcie A, do kuli ω_2 – w punkcie B i do kuli ω_3 – w punkcie C. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.*

Rozwiązanie

Niech O_1, O_2 i O_3 będą odpowiednio środkami kul ω_1, ω_2 i ω_2.

Odcinki O_1A oraz O_2B są prostopadłe do płaszczyzny stycznej, zatem w szczególności odcinki te są równoległe. W takim razie czworokąt O_1ABO_2 jest trapezem prostokątnym, w którym $O_1A=3$, $O_2B=4$, $O_1O_2=O_1A+O_2B=7$.

Niech O_1H będzie wysokością tego trapezu opuszczoną na podstawę O_2B. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AB^2=O_1H^2=O_1O_2^2-O_2H^2=(O_2B+O_1A)^2-(O_2B-O_1A)^2=4\cdot O_2B\cdot O_1A=48.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy $BC^2 = 4 \cdot O_2B \cdot O_3C = 192$ oraz $CA^2 = 4 \cdot O_3C \cdot O_1A = 144$. W takim razie mamy $AB^2 + CA^2 = BC^2$, więc trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A. Mamy również $BC^2 = 4AB^2$, więc $BC = 2AB$. W takim razie trójkąt ABC stanowi połowę trójkąta równobocznego i wobec tego jego kąty wynoszą 30°, 60° i 90°.

Odpowiedź

Miary kątów trójkąta ABC wynoszą 30°, 60° i 90°.

---

15. *Okrąg o, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach F i S. Punkt O jest środkiem okręgu o, a punkt E jest symetryczny do punktu S względem punktu A. Wykaż, że proste EF i AO są równoległe.*

Rozwiązanie

Ponieważ zachodzą równości $AF = AS = AE$, to odcinek ES jest średnicą okregu opisanego na trójkącie ESF. W takim razie $\sphericalangle SEF = \frac{1}{2} \sphericalangle SAF$.

Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc leży on na dwusiecznej kąta przy wierzchołku A trójkąta ABC. Wobec tego $\sphericalangle SAO = \frac{1}{2} \sphericalangle SAF = \sphericalangle SEF$. Stąd wniosek, że proste EF i AO są równoległe.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu