Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria I (lipiec 2012) — rozwiązania zadań

1. *W sześcianie o krawędzi* 1 *umieszczono* 344 *punkty. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z tych punktów jest mniejsza od* 1/4.

Rozwiązanie

Podzielmy sześcian na 343 sześciany o krawędzi 1/7, dzieląc każdą krawędź dużego sześcianu na 7 odcinków równej długości i prowadząc przez punkty podziału płaszczyzny równoległe do ścian sześcianu. Wówczas przynajmniej jeden z sześcianów podziału zawiera pewne dwa spośród danych 344 punktów (wewnątrz lub na brzegu). Odległość tych dwóch punktów nie przekracza długości przekątnej sześcianu, czyli

$$\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3\cdot 16}}{4\cdot 7}=\frac{\sqrt{48}}{4\cdot 7}<\frac{\sqrt{49}}{4\cdot 7}=\frac{1}{4}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

2. *Dane są takie dodatnie liczby całkowite* a, b, c, d, n, *że liczby* $a+b^2$, $b+c^2$, $c+d^2$, $d+a^2$ *są podzielne przez* n. *Udowodnij, że liczba*

$$ab^8+b^8c^{64}-c^{64}d^{512}-d^{512}a$$

jest podzielna przez n^2.

Rozwiązanie

Zapisując dane w treści zadania podzielności w postaci kogruencji, otrzymujemy

$$a\equiv -b^2 \pmod n,\quad b\equiv -c^2 \pmod n,\quad c\equiv -d^2 \pmod n,\quad d\equiv -a^2 \pmod n\,.$$

Zatem

$$a\equiv -b^2\equiv -c^4\equiv -d^8\equiv -a^{16}\equiv -b^{32}\equiv -c^{64} \pmod n\,,$$

skąd wynika, że liczba $a+c^{64}$ jest podzielna przez n. Podobnie

$$b\equiv -d^{64} \pmod n\,,$$

co, po obustronnym podniesieniu do potęgi 8, daje

$$b^8\equiv d^{512} \pmod n\,,$$

a to oznacza, że liczba b^8-d^{512} jest podzielna przez n.

Pozostaje zauważyć, że dana w treści zadania liczba rozkłada się na iloczyn dwóch czynników, z których każdy jest podzielny przez n. A mianowicie

$$ab^8+b^8c^{64}-c^{64}d^{512}-d^{512}a=(a+c^{64})\cdot(b^8-d^{512})\,.$$

Zatem liczba ta jest podzielna przez n^2, co należało wykazać.

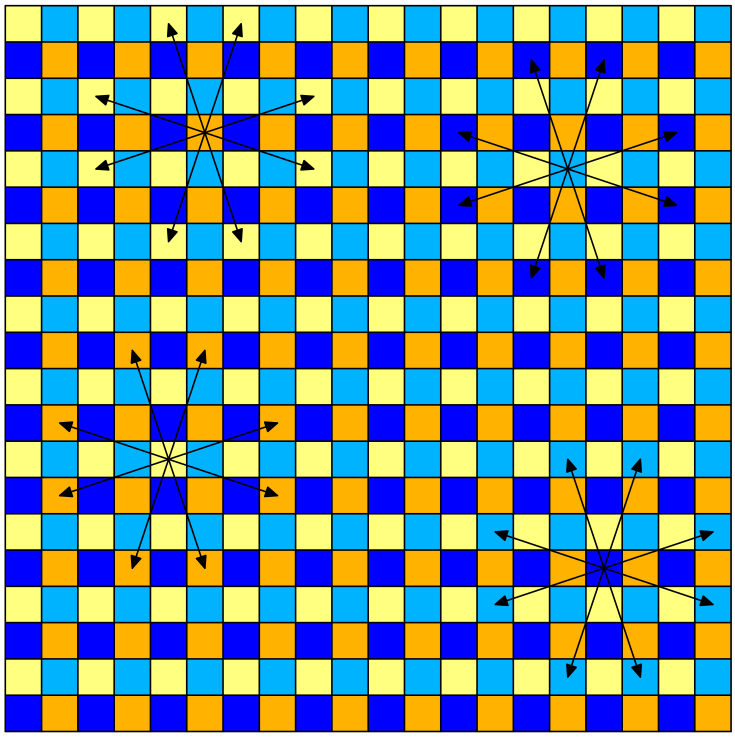
3. *Ile co najwyżej* $(3,1)$*-skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach* 100×100 *w taki sposób, aby żadne dwa sobie nie zagrażały?*

Uwaga: Dwa $(3,1)$*-skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach* 2×4.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

Pokolorujmy szachownicę jak na rys. 1.



rys. 1

Przy takim kolorowaniu każdy (3,1)-skoczek (zwany dalej skoczkiem) umieszczony na szachownicy atakuje pola o takim samym kolorze (niebieski/żółty) jak kolor pola, na którym sam stoi, ale o przeciwnym odcieniu (jasny/ciemny).

Możemy więc ustawić na szachownicy 5000 skoczków umieszczając je np. na wszystkich polach ciemnoniebieskich i ciemnożółtych.

Ponadto wykażemy, że nie jest możliwe ustawienie na szachownicy nieatakujących się skoczków zajmujących więcej niż połowę pól.

W tym celu ponumerujmy pola prostokąta 2×6 jak na rys. 2 — każda z liczb od 1 do 6 pojawia się dwukrotnie. Ponieważ skoczek umieszczony na dowolnym polu tego prostokąta atakuje drugie pole z takim samym numerem, jak numer pola, na którym stoi, więc dowolnie rozmieszczone nieatakujące się skoczki muszą zajmować pola z różnymi numerami. Nie można więc umieścić więcej niż 6 skoczków.

1	3	5	2	4	6
2	4	6	1	3	5

rys. 2

Następnie numerujemy pola prostokąta 4×8 jak na rys. 3. Zasadę tworzenia numeracji można prześledzić na rys. 4, na którym ponumerowano pola żółte (pola niebieskie są numerowane w/g tego samego schematu).

1	9	4	10	7	13	8	16
10	3	13	6	11	4	14	7
2	11	5	14	3	12	6	15
9	1	12	2	15	5	16	8

rys. 3

1		4		7		8	
	3		6		4		7
2		5		3		6	
	1		2		5		8

rys. 4

W tym wypadku każda z liczb od 1 do 16 pojawia się dwukrotnie i podobnie jak poprzednio, skoczek umieszczony na dowolnym polu prostokąta atakuje drugie pole z takim samym numerem, jak numer pola, na którym stoi. Zatem dowolnie rozmieszczone nieatakujące się skoczki muszą zajmować pola z różnymi numerami, skąd wynika, że nie można umieścić więcej niż 16 skoczków.

Nie można zatem zająć więcej niż połowy pól nieatakującymi się skoczkami w prostokącie 2×6, ani w prostokącie 4×8, ani też w żadnej figurze, która może być podzielona na takie prostokąty.

Zauważmy przy tym, że z dwóch prostokątów 2×6 można złożyć prostokąt 4×6, a z dwóch prostokątów 4×6 i jednego prostokąta 4×8 można złożyć prostokąt 4×20. Z kolei ze 125 takich prostokątów można złożyć kwadrat 100×100, co oznacza, że nie można ustawić w tym kwadracie więcej niż 5000 nieatakujących się skoczków.

Odpowiedź: Największa liczba niezagrażających sobie (3,1)-skoczków, jakie można ustawić na szachownicy, to 5000.

---

4. *Podstawą pewnego ostrosłupa jest pięciokąt foremny. Każda ściana boczna tego ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym. Czy wynika stąd, że krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości?*

Rozwiązanie

Nie wynika. Skonstruujemy ostrosłup spełniający warunki zadania, w którym nie wszystkie krawędzie boczne są równej długości.

Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem foremnym o środku O, a punkt H — dowolnym punktem na odcinku AO. Wówczas $BH<AB$, ponieważ w trójkącie ABH

$$\sphericalangle AHB=\sphericalangle AOB+\sphericalangle OBH>\sphericalangle AOB=72^\circ>54^\circ=\sphericalangle HAB\,.$$

Oznaczmy przez l prostą prostopadłą do płaszczyzny pięciokąta i przechodzącą przez punkt H. Na prostej l obierzmy taki punkt S, że $HS=\sqrt{AB^2-BH^2}$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $BS=\sqrt{HS^2+BH^2}=AB$, a więc trójkąty ABS, BCS są równoramienne. Analogicznie trójkąty AES i EDS są równoramienne, ponieważ $SE=SB$.

Ponadto trójkąt CDS jest równoramienny, ponieważ punkt H leży na symetralnej boku CD, a więc punkt S leży na płaszczyźnie symetralnej CD. W takim razie $CS=DS$.

---

5. *Punkty K i L należą odpowiednio do boków BC i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki BL i DK przecinają się w punkcie P. W każdy z czworokątów $ABPD$ i $CKPL$ można wpisać okrąg. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.*

Rozwiązanie

Skoro w czworokąt $CKPL$ można wpisać okrąg, to również w czworokąt wklęsły $CBPD$ można wpisać okrąg (ten sam, który jest wpisany w czworokąt $CKPL$). W takim razie

$$CB+DP=CD+BP\,.$$

Skoro w czworokąt $ABPD$ można wpisać okrąg, to otrzymujemy

$$AD+BP=AB+DP\,.$$

Po dodaniu powyższych równości stronami i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy

$$CB+AD=CD+AB\,.$$

Stąd wynika, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Urszula Swianiewicz
Kierownik naukowy obozu