IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(15 marca 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Danych jest takich pięć dodatnich liczb rzeczywistych, że iloczyn dowolnych dwóch spośród nich jest mniejszy od iloczynu pozostałych trzech. Udowodnij, że każda z danych liczb jest większa od 1.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy dane liczby przez a, b, c, d, e. Wiemy, że $bc < ade$ oraz $de < abc$. Wobec tego $bc < ade < a \cdot abc$. Dzieląc obie strony otrzymanej nierówności $bc < a^2bc$ przez liczbę dodatnią bc, uzyskujemy $1 < a^2$. Ponieważ a jest liczbą dodatnią, więc z ostatniej nierówności wynika, że $a > 1$. Analogicznie dowodzimy, że każda z pozostałych czterech liczb jest większa od 1.

---

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 8$ oraz $BC = 10$. Punkt M jest środkiem boku AB. Okrąg o środku w punkcie M ma promień długości 1. Wykaż, że na tym okręgu istnieje dokładnie jeden taki punkt P, dla którego $\sphericalangle APC = 90°$.

Szkic rozwiązania

Niech N będzie środkiem boku AC. Zbiorem takich punktów P, że $\sphericalangle APC = 90°$, jest okrąg o średnicy AC (z wyłączeniem punktów A i C), czyli okrąg o środku w punkcie N i promieniu długości 4. Oznaczmy ten okrąg przez o.

Okrąg o środku M i promieniu 1 oznaczmy przez ω. Z twierdzenia Talesa wynika, że $MN = \frac{1}{2}BC = 5$, a zatem odległość między środkami okręgów ω i o jest równa sumie długości ich promieni. Wobec tego okręgi te są styczne zewnętrznie. Ich punkt styczności to jedyny punkt okręgu ω, który spełnia warunki zadania.

---

3. Dodatnie liczby całkowite a, b mają tę własność, że liczba $4ab$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + b^2$. Udowodnij, że $a = b$.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie nierówność $(a-b)^2 \geqslant 0$, otrzymujemy $\frac{4ab}{a^2+b^2} \leqslant 2$. Z warunków zadania wynika, że $\frac{4ab}{a^2+b^2}$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Wobec tego możliwe są dwa przypadki: $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 1$ lub $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 2$.

(1) Przypuśćmy, że $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 1$. Wówczas $4ab = a^2 + b^2$, skąd uzyskujemy zależności

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 6ab \quad \text{oraz} \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2ab.$$

Ponadto $2ab > 0$, więc pierwszą z powyższych równości możemy podzielić stronami przez drugą, otrzymując

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{6ab}{2ab} = 3, \quad \text{czyli} \quad \left|\frac{a+b}{a-b}\right| = \sqrt{3}.$$

Po lewej stronie ostatniej równości znajduje się iloraz dwóch liczb całkowitych, czyli liczba wymierna, a po prawej — liczba niewymierna. Ten przypadek prowadzi zatem do sprzeczności.

(2) Jeśli $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 2$, to $4ab = 2a^2 + 2b^2$, czyli równoważnie $(a-b)^2 = 0$. Stąd wynika, że $a = b$, co należało wykazać.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano 51 punktów. Wykaż, że wśród wybranych punktów istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy dany 100-kąt foremny przez $A_1A_2\ldots A_{100}$. Podzielmy jego wierzchołki na 25 czteroelementowych grup w taki sposób, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami kwadratu:

$$A_1A_{26}A_{51}A_{76},\ A_2A_{27}A_{52}A_{77},\ A_3A_{28}A_{53}A_{78},\ \ldots,\ A_{25}A_{50}A_{75}A_{100}.$$

Przypuśćmy, że z każdej grupy wybrano co najwyżej dwa wierzchołki. Wybranych punktów jest wówczas co najwyżej $25\cdot 2=50$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że wśród rozważanych kwadratów istnieje taki, którego co najmniej trzy wierzchołki zostały wybrane. To kończy rozwiązanie zadania, ponieważ każde trzy wierzchołki kwadratu tworzą trójkąt prostokątny równoramienny.

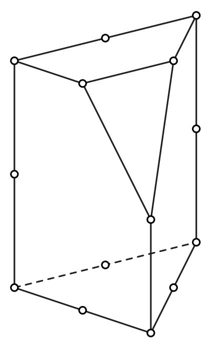
---

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

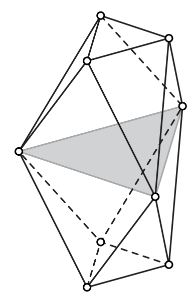
Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

Rozpatrzmy graniastosłup trójkątny. Wybierzmy jego dowolny wierzchołek i weźmy pod uwagę płaszczyznę przechodzącą przez środki krawędzi, które schodzą się w tym wierzchołku. Płaszczyzna ta rozcina dany graniastosłup na dwa wielościany. Usuńmy tę z otrzymanych brył, do której należy wybrany wierzchołek (rys. 1).



rys. 1



rys. 2

Powtarzając opisaną konstrukcję dla każdego z pozostałych wierzchołków graniastosłupa, otrzymamy wielościan, który spełnia warunki zadania (rys. 2). W każdym jego wierzchołku schodzą się cztery krawędzie i posiada on przekrój będący trójkątem.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI | Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej | MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ | ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji | UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego