IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(18 stycznia 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieje taka trójka (a,b,c) dodatnich liczb nieparzystych, że

$$\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{a+b}\ ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Daną równość podnosimy stronami do kwadratu, a następnie przekształcamy równoważnie, uzyskując kolejno:

$$\begin{aligned} a-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)}+b-c&=a+b,\\ \sqrt{(a-c)(b-c)}&=c,\\ (a-c)(b-c)&=c^2. \end{aligned}$$

Jednak jeśli liczby a, b, c są wszystkie nieparzyste, to lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, a prawa — liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje trójka liczb spełniających warunki zadania.

---

2. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio podstaw AB i CD. Punkt P należy do odcinka MN. Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

Szkic rozwiązania

Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczali pole figury $\mathcal{F}$.

Zauważmy, że $[AMP]=[BMP]$, gdyż oba trójkąty mają równe podstawy AM i BM oraz wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka P. Analogicznie uzasadniamy równość $[DNP]=[CNP]$. Ponadto trapezy $AMND$ i $BMNC$ mają równe wysokości, a przy tym $AM=BM$ oraz $DN=CN$. Stąd wniosek, że $[AMND]=[BMNC]$. Łącząc uzyskane równości pól, otrzymujemy

$$[ADP]=[AMND]-[AMP]-[DNP]=[BMNC]-[BMP]-[CNP]=[BCP].$$

---

3. W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że otrzymane sumy nie mogą być kolejnymi liczbami naturalnymi.

Zauważmy, że suma 18 rozważanych liczb jest liczbą parzystą, jako dwukrotność sumy wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy. Z drugiej strony, wśrod 18 kolejnych liczb naturalnych znajduje się dokładnie 9 liczb nieparzystych, których suma jest liczbą nieparzystą. Stąd wniosek, że suma 18 kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geqslant 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

Szkic rozwiązania

Ponieważ każdy z trzech kolorów został użyty, więc istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach różnych kolorów. Spośród wszystkich takich trójkątów wybierzmy ten, który ma najmniejsze pole (jeśli trójkątów o najmniejszym polu jest więcej niż jeden, wybieramy dowolny z nich). Nazwijmy ten trójkąt ABC. Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

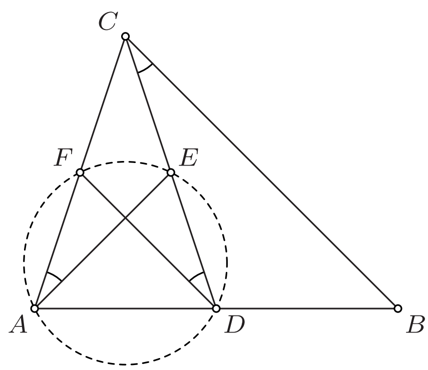
Przypuśćmy, że do wnętrza trójkąta ABC należy pewien zaznaczony punkt P. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt P jest tego samego koloru, co punkt A. To oznacza, że każde dwa wierzchołki trójkąta BCP mają różne kolory. Jednak pole tego trójkąta jest mniejsze od pola trójkąta ABC. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że do wnętrza trójkąta ABC nie należy żaden zaznaczony punkt.

---

5. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$.

Szkic rozwiązania

Niech F będzie środkiem odcinka AC. Wówczas $BC \parallel DF$, a zatem $\sphericalangle BCD = \sphericalangle FDC$. Stąd, po uwzględnieniu założenia $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, uzyskujemy $\sphericalangle CAE = \sphericalangle FDC$, czyli $\sphericalangle FAE = \sphericalangle FDE$.



Ponieważ punkty A i D znajdują się po tej samej stronie prostej EF, więc ostatnia równość kątów oznacza, że na czworokącie $ADEF$ można opisać okrąg. Ponadto $AD \parallel EF$, więc czworokąt ten jest trapezem równoramiennym. Stąd $AF = DE$, czyli $AC = CD$. Tym samym dowód jest zakończony.
