ORE

Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

Agnieszka Nowak-Łojewska

Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci

Poradnik dla nauczycieli klas I-III

Wybrane obszary edukacji matematycznej dzieci

Poradnik dla nauczycieli klas I-III

Agnieszka Nowak-Łojewska
(opracowanie graficzne zadań Joanna Łojewska)

Wydawca:
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. +48 22 345 37 00
fax +48 22 345 37 70

Publikacja powstała w ramach projektu „Wdrożenie podstawy programowej kształcenia ogólnego w przedszkolach i szkołach”

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Realizacja:
Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorczyk
www.grzeg.com.pl

Spis treści

Wstęp

Matematyka nie jest ulubioną dziedziną nauczycieli wczesnej edukacji. W międzynarodowych badaniach polscy studenci pedagogiki wypadają słabiej niż ich koledzy i koleżanki z innych krajów. Osiągają znacznie niższe wyniki w zakresie wiedzy matematycznej oraz dydaktyki matematyki[1].

Z innych badań[2] wynika, że nauczyciele wczesnej edukacji mają problemy z uświadomieniem sobie, czym jest rozumienie pojęć matematycznych. Ich szkolne doświadczenia matematyczne są tak zdeformowane i negatywne, że rzucają cień na charakter wiedzy matematycznej swoich uczniów, a nawet prowadzą do upowszechniania opinii, że opanowanie schematu (określonej strategii liczenia, sposobu rozwiązania zadania, zastosowania wzoru) jest rozumieniem pojęcia. Tym sposobem wierzą, że opanowanie umiejętności rachunkowych zgodnie z podanym wcześniej algorytmem przyczyni się do zbudowania wiedzy matematycznej ich uczniów.

Z badań studentów poproszonych o retrospektywną ocenę ich własnej edukacji matematycznej wyłania się obraz obaw i dystansu, niechęci i lęku[3]. Studenci opisują w nich poważne trudności w uczeniu się, zwłaszcza w zakresie rozwiązywania zadań. Wskazują zaawansowaną niechęć, a nawet nienawiść do przedmiotu i nadzieję, że wybór kierunku studiów (edukacja przedszkolna/wczesnoszkolna) pomoże im uniknąć jakiegokolwiek kontaktu z tą dziedziną wiedzy. W tym też kontekście H. Siwek pisała o konieczności realizowania z przyszłymi nauczycielami przedszkola i młodszych klas podstaw matematyki metodami przyjętymi w nauczaniu początkowym, aby tym sposobem przeciwdziałać ich lękowi przed matematyką.

Dodatkowy problem stanowią ostatnie korekty programowe i metodyczne w obszarze edukacji matematycznej. Są one powierzchowne, a wręcz kosmetyczne. Zmienia się forma proponowanych rozwiązań (np. bardziej kolorowe podręczniki, ładniej wykonane karty pracy, trwalsze pomoce dydaktyczne), ale nie zmienia się ich koncepcja. Jak pisze A. Kalinowska „nadal w potocznym odbiorze uważa się, że wiedza matematyczna ma charakter jednoznacznie określony, niepoddający się większym zmianom, wolny od obciążeń ideologicznych. Wypracowane w szkole i oczekiwane, jako efekty uczniowskie znaczenia matematyczne, cechują się słabymi tendencjami do modyfikowania koncepcyjnego"[4]. Z analiz materiałów metodycznych wynika, że nauczanie matematyki na poziomie wczesnej edukacji (E. Gruszczyk-Kolczyńska, M. Dąbrowski, A. Kalinowska i inni) nie ma charakteru krytyczno-twórczego, lecz jedynie

1 M. Czajkowska, Umiejętności matematyczne przyszłych polskich nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w świetle wyników badania TEDS, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2012, nr 1 (16), s. 67.

2 M. Dąbrowski, E. Wiatrak, Nauczyciele nauczania początkowego w świetle ankiet, [w:] Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008, red. M. Dąbrowski, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2009, s. 159 i następne.

3 E. Urbańska, O stosunku kandydatów na nauczycieli klas początkowych do matematyki jako przedmiotu ich studiów [w:] Dydaktyka matematyki, red. Z. Krygowska, Seria V, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Warszawa 1985.

4 A. Kalinowska, Poznawczy i kulturowy wymiar dezintegracji wczesnoszkolnych pojęć matematycznych, [w:] (Anty)edukacja wczesnoszkolna, red. D. Klus-Stańska, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2014, s. 373.

techniczny z wyraźnym naciskiem na wyćwiczanie uczniów w uzyskiwaniu u wszystkich jednakowego wzorca poprawności. Przykładem tego może być wyuczanie algorytmu rozwiązywania zadania tekstowego, powielanie przez uczniów strategii myślowych nauczyciela czy pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia. Dla zilustrowania tego posłużę się ostatnim z przykładów.

Tabliczka mnożenia, współcześnie, jak i przed stu laty, przez wielu nauczycieli uznawana jest, jako podstawowa wiedza wczesnoszkolnej matematyki niezbędna dla biegłości obliczeń. Dla wielu uczniów jest ona natomiast koszmarem spędzającym sen z powiek. Powodem jest transmisyjny przekaz wiedzy uwypuklający wyuczenie się na pamięć gotowych wyników rozumianych jako punkt wyjścia dla bardziej skomplikowanych procedur (np. mnożenia pisemnego, itd.). Znany jest mi z praktyki szkolnej przykład, kiedy mama ucznia z klasy II została wezwana do szkoły na rozmowę, aby zwróciła uwagę, że jej syn jeszcze pamięciowo nie opanował tabliczki mnożenia. Posługuje się natomiast własnymi, wymyślonymi strategiami, które opóźniają jego tempo pracy. Oznacza to, że samodzielnie tworzone przez ucznia sposoby dochodzenia do wyników podstawowych iloczynów (np. 4 razy 8 to dwie ósemki i jeszcze dwie ósemki), służące zresztą budowaniu zróżnicowanych strategii obliczeniowych rozwijających umiejętności arytmetyczne i ich rozumienie, zostały niżej ocenione przez nauczyciela niż wyuczone pamięciowo wyniki.

Inną ilustracją marginalizowania myślenia matematycznego i koncentracji na zagadnieniach odległych od zainteresowań młodszych uczniów jest nieadekwatność kulturowa propozycji zadaniowych i nieuwzględnianie dziecięcego doświadczenia. Jak zauważa M. Dąbrowski „w ciągu (…) lat pojawiły się komputery, telefony komórkowe, telewizja satelitarna, Internet, aparaty cyfrowe, smartfony, tablety. Dzieci z nimi obcują na co dzień, ich poziom wiedzy nieformalnej jest nieporównywalnie wyższy niż 20 lat temu. Ale w szkole od absolwenta klasy trzeciej oczekuje się dziś mniej więcej tyle samo, co dwadzieścia lat temu od dziecka kończącego klasę pierwszą. W ciągu ostatniego dwudziestolecia, przy każdej kolejnej reformie czy nowelizacji podstawy programowej z nauczania początkowego stopniowo były usuwane kolejne zagadnienia matematyczne”[5]. Problem stanowią więc ciągle zaniżane wymagania wobec młodszych uczniów (tłumaczone mało sensownym argumentem tzw. obniżenie progu szkolnego do 6. r.ż.), a dalej zubożanie tematyki matematycznej przez ciągłe ograniczanie zakresu pojęć i czasu na ich kształtowanie.

Realizacji edukacji matematycznej nie sprzyja również jej tzw. zintegrowanie, gdy w miejsce poznawczo przekonującej aktywności matematycznej proponuje się dzieciom sztucznie tworzone międzyprzedmiotowe zlepki tematyczne, rachunki „ubrane” w kolejne wersje środowiskowych asocjacji[6], w których matematykę upatruje się w przeliczaniu bałwanków zimą, liczeniu kwiatków na rabatce wiosną i porządkowaniu liści przy temacie polska jesień.

Odzwierciedleniem zaniedbanego i zdeformowanego podejścia do edukacji matematycznej młodszych uczniów są dostępne międzynarodowe badania TIMSS[7]. Wynika z nich,

[5] M. Dąbrowski, O matematycznych wynikach polskich trzecioklasistów w badaniach TIMSS, „Problemy Wczesnej Edukacji” 2013, nr 4(23), s. 36.

[6] A. Kalinowska, Poznawczy i kulturowy wymiar…., op.cit., s. 378.

[7] M. Dąbrowski, O matematycznych wynikach…, op.cit.

że młodsi uczniowie z Polski, na tle ich zagranicznych rówieśników są najsłabsi w Europie. Zajmują ostatnie miejsce wśród krajów Europy, na 34 wśród 50 krajów uczestniczących w badaniu. Najsłabiej polscy uczniowie wypadli w geometrii, niewiele lepiej w arytmetyce. Zadania dotyczyły odczytywania, gromadzenia i analizowania danych (wykresy słupkowe, kołowe), zatem obejmowały tematykę, która niezbyt często jest obecna w klasach I-III, za to jest często obecna w mediach (ale do nich rzadko są odwołania na lekcjach w klasach początkowych). Zdecydowanie lepiej trzecioklasiści wypadli w zadaniach nietypowych, które były realistyczne i odwoływały się do codzienności, niekiedy otwarte, odnoszące się do ich wiedzy pozaszkolnej. Jak pisze M. Dąbrowski możemy zatem przyjąć, że „ mamy uczniów o dużym potencjale oraz mało efektywnie działającą szkołę”[8]. Spojrzenie takie daje wiele do myślenia i skłania do refleksji nad potrzebą modyfikacji szkolnej edukacji matematycznej dzieci.

Oznacza to, że nauczanie matematyki w wersji transmisyjno-podającej – wyraźnie dominującej w polskiej szkole jest naznaczone problemem dezintegracji wiedzy. W wymiarze poznawczym „dziecko nie uczy się wówczas konstruowania w umyśle systemu znaczeń (tu: matematycznych), szukania czytelnych dla siebie powiązań między pojęciami czy tworzenia warsztatu badawczego, pozwalającego odkrywać relacje między liczbami, jako reguły matematyczne. Budowane znaczenia mają charakter jednostkowych i niepowiązanych ze sobą schematów postępowania (w rodzaju mechanicznie stosowanych trików)[9]. W konsekwencji prowadzi to do problemów z matematyką w starszych klasach i do ogólnej niechęci do przedmiotów z tego obszaru.

Oznacza to, że w edukacji matematycznej dzieci konieczne są zmiany tak w obszarze aktywności uczniów, jak przygotowania nauczycieli do pracy na tym poziomie kształcenia. Wiąże się to ze zmianą w myśleniu o edukacji matematycznej i jej ujmowania w kategoriach procesu, czyli konstruowania matematycznych pojęć wyrastającego z indywidualnego badania problemów. Uczenie się polega wówczas na poszukiwaniu znaczeń i rozpoczyna się od rozwiązywania problemów. Zamiast podawania gotowej wiedzy przez nauczyciela uczeń staje wobec problemu. Poszukuje jego rozwiązania, korzysta przy tym z osobistego doświadczenia, stawia hipotezy i je weryfikuje, pomnaża swoją wiedzę i zdobywa strategie intelektualne radzenia sobie z problemami. Postępuje za tym uczenie się oparte na rozumieniu pojęć, a precyzja ich stosowania nie jest efektem przyswojenia gotowych definicji, ale wynika z czytelnego dla ucznia kontekstu ich poznawania oraz użyteczności zastosowania. Jest to zgodne z założeniami konstruktywistycznej teorii uczenia się w świetle, której uczeń to aktywna jednostka. Jego myślenie jest uwarunkowane umiejętnością interpretowania i negocjowania znaczeń, nauczyciel zaś występuje w roli inspiratora aktywności uczniów i osoby aranżującej warunki do uczenia się.

W strukturze książki wyraża się to kilkoma obszarami rozważań. Pierwszy polega na przybliżeniu konstruktywistycznej teorii uczenia się i jej odniesień do edukacji matematycznej. Druga, jest analizą treści matematycznych w podstawie programowej i podręcznikach celem ukazania poziomu kompetencji uczniów klas I-III. Trzecia część odsłonia mity w myśleniu o edukacji młodszych uczniów i wynikające z nich deformacje myślenia matematycznego. Część czwarta zorientowana jest na proces kształtowania pojęć mate-

[8] Ibidem, s. 36.
[9] A. Kalinowska, Poznawczy i kulturowy wymiar…., op.cit., s. 374.

matycznych. Wyjaśnione są w niej zasady konstruowania sytuacji problemowych oraz zilustrowane różnice między zadaniami otwartymi i zamkniętymi z wyraźnym naciskiem na potrzebę upowszechniania zadań otwartych jako bardziej aktywizujących myślenie dzieci. Część ostatnia to analiza propozycji podręcznikowych – zadań zaczerpniętych z pakietu *Nasza szkoła. Matematyka* pod kątem omówienia zasad ich konstruowania oraz możliwości zastosowania na zajęciach w klasach I-III.

1. Konstruktywistyczne podstawy edukacji matematycznej dzieci

Osadzenie edukacji matematycznej w konstruktywizmie prowadzi do zmian wyrażonych w uczeniu się przez rozumienie pojęć, konstruowanie sytuacji problemowych i formułowanie zadań o charakterze otwartym, przez które prowokowana jest aktywność uczniów. Rozwiązania te, wywodzące się między innymi od J. Piageta[10] stoją na stanowisku, że w każdym momencie swojego życia dziecko posiada struktury poznawcze, które wykorzystuje dla interpretowania nowych doświadczeń i ich modyfikowania. W efekcie każde dziecko raczej konstruuje swoją wiedzę, niż ją po prostu zapamiętuje. Najlepszym dla dziecka i jego aktywnego uczestnictwa w procesie zdobywania wiedzy jest więc, aby było twórcze, krytyczne, poszukujące i miało udział w budowaniu swojej matematyki.

1.1. Ogólne założenia konstruktywizmu psychologicznego

Proces uczenia się (zgodnie z przyjętą w tekście opcją interpretacyjną) to proces konstruowania wiedzy przez jednostkę. Towarzyszą mu zmiany w strategiach pracy nauczyciela i strategiach uczenia się dziecka. Syntetyczne ich ujęcia zawiera tabela 1. Zaprezentowane są w niej czynniki sprzyjające konstruowaniu wiedzy związane, tak z osobą ucznia, jak i nauczyciela. Wymienione atrybuty są ze sobą wzajemnie powiązane, gdyż zmianie w postrzeganiu ucznia towarzyszy zmiana sposobów pracy nauczyciela, tak jak zmianie oczekiwań uczniowskich wobec edukacji towarzyszy zmiana w zachowaniu nauczyciela.

Tabela 1. Warunki konstruowania wiedzy w szkole

Atrybuty związane z osobą nauczyciela	Atrybuty związane z osobą ucznia
Organizacja warunków uczenia	Podejmowanie aktywności poznawczej
Wykorzystanie epizodów wspólnego zaangażowania	Uwzględnianie kontekstu biograficznego aktywności
Refleksja w działaniu i nad działaniem	Prowokowanie refleksji interpretacyjnej, krytycznej, projektującej

Źródło: opracowanie własne.

Podstawowym atrybutem związanym z osobą nauczyciela jest zmiana jego roli z tzw. przewodnika i przekaźnika wiedzy na facylitatora stymulującego działania dziecka w kierunku samodzielności i poznawczej zaradności. Nauczyciel występuje wówczas w roli **organizatora warunków uczenia się**. Koncentruje się na **stwarzaniu sytuacji edukacyjnych**, które są wyzwaniem dla ucznia. Są one ciekawe i prowokują do myślenia. Najlepiej, jak odwołują się do sytuacji realistycznych i bazują na doświadczeniu i wiedzy dziecka, bo te ułatwiają im rozumienie badanych zjawisk i analizowanych zadań, ułatwiają zrozumienie tego, co robią i w jaki sposób oraz uzasadnianiu, dlaczego tak postępują.

[10] C. Kamii, Young children reinvent arithmetic, 2nd ed., Teacher College Press, New York 2000.

Niezmiernie ważne jest, aby w tworzeniu sytuacji sprzyjających konstruowaniu wiedzy przez dzieci, nauczyciel **kierował się dziecięcym potencjałem**. Jego odzwierciedleniem jest instynkt ciekawości[11] i dziecięce prawo do zainteresowania[12]. Ujawniają się one w dziecięcych pytaniach o rzeczy, zjawiska, o procesy zachodzące w świecie przyrody, o przyczyny i skutki tych procesów. Ujawniają się w dziecięcych potrzebach eksplorowania, świeżości wiedzy, badania, odkrywania. Są napędem do działania, zdobywania informacji. Aktywny nauczyciel będzie rozpoznawał te warunki, aby wykorzystywać je do stworzenia dzieciom sytuacji do uczenia się. Nie będzie ich szukał w swoich zasobach, lecz inspiracją dla niego będą dzieci i ich potencjał pytań, poszukiwań, stawianych problemów. W tym też kontekście J. Piaget pisał o konieczności stwarzania dziecku okazji do uczenia się i zastępowania metod podających eksperymentowaniem, badaniem, poszukiwaniem, praktycznym działaniem. Zadaniem nauczyciela jest wówczas rozpoznanie tego, co zaciekawia dzieci, zaburza ich równowagę poznawczą i wykorzystywanie tego w procesie uczenia się.

We wszystkich tych sytuacjach wymagana jest natomiast wiedza i to nie tylko o dziecku i prawidłowościach kształcenia, czy różnorodnych rozwiązaniach metodycznych, lecz również tzw. wiedza taktyczna – wiedza dziejąca się w sytuacjach społecznych, którą nauczyciel jest zmuszony wytworzyć adekwatnie do zaistniałych okoliczności.

Właściwy przebieg tych sytuacji wiąże się ze stosowaniem przez nauczycieli **różnych metod i form pracy**, niekiedy **gier i zabaw**, **elementów dramy**, aktywizujących form **pracy w grupach**. Ich właściwy przebieg to również **korzystanie z bogatego materiału konkretnego**, różnych pomocy i środków dydaktycznych sprzyjających korzystaniu przez uczniów z odmiennych reprezentacji wiedzy: enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej. Jak zauważa J. Bruner „rozwój polega nie na serii odrębnych etapów, lecz na opanowywaniu owych trzech form reprezentacji wraz z częściowym przekładem każdej z nich na pozostałe"[13]. Uczenie się rozumiane jako przechodzenie na wyższy poziom rozwoju wymaga konstruowania reprezentacji.

Opisany atrybut konstruowania wiedzy koresponduje z **aktywnością ucznia**. Jest ona poznawcza, gdy akt uczenia się „nie jest prostym odświeżaniem, przypominaniem czy reaktywowaniem informacji, ale ma postać ciągłego tworzenia nowych konstrukcji z napływających informacji"[14]. Oznacza to, iż zmiana jest rozwojowa, a aktywność dziecka staje się poznawcza, gdy ma wymiar konstrukcyjny, a zamiast biernego postrzegania faktów i zjawisk ma miejsce czynne w nie wnikanie; zamiast mechanicznego przyswajania wiadomości intensywne ich analizowanie i ujmowanie z różnych perspektyw. A zatem dziecko najwięcej uczy się, rozumie i zapamiętuje, gdy bada rzeczywistość, zarządza własnym działaniem, jest „ja" myślącym, które odkrywa świat i zdobywa wiedzę jako osobistą konstrukcję. Towarzyszą temu procesy:

- mentalizacji – zrozumienie problemu i świadome przemyślane znalezienie najlepszego rozwiązania,
- konkretyzacji – polegającej na wyborze rozwiązania, które w danej chwili jest najbardziej efektywne,
- socjalizacji, która ma na celu podporządkowanie rozwiązania wymogom społecznym.

---

11 J. Bruner, Proces kształcenia, PWN, Warszawa 1965.

12 J. Piaget, Science of education and the psychology of the child, Viking Press, New York 1970, s. 151.

13 J. Bruner, Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978, s. 532.

14 U. Neisser, Cognitive psychology, Appelton Century Crofts, New York 1967, s. 285-286.

Wymienione procesy sprawiają, że osoba ucząca się aktywnie uczestniczy w procesie zdobywania wiedzy, poszukuje własnych strategii intelektualnych rozwiązania problemu, jest samodzielna, decyzyjna, zaangażowana w uczenie się i rozumie to, co robi.

Kolejnym warunkiem konstruowania wiedzy w szkole jest **chęć zrozumienia punktu widzenia dziecka**, czyli wykorzystywanie epizodów wspólnego zaangażowania[15]. Nauczyciel interesuje się wówczas stanowiskiem dziecka wobec zadania, jego spojrzeniem na problem, jego sposobem ujmowania rzeczywistości, jego opinią na dany temat oraz jego ważeniem problemu. Idea nauczyciela, od którego wszystko zależy traci rację bytu, a jeżeli jeszcze się pojawia, to raczej w śladowej postaci na przykład na zakończenie rozważań, ich podsumowanie, nigdy zaś jako zasadniczy motyw lekcji, jej przebiegu i sposobu organizowania. Uzupełniana jest ona natomiast uwzględnianiem kontekstowości biograficznej dziecka[16]. Oznacza ona rozpoznawanie i uwzględnianie wiedzy uprzedniej dziecka (tej zdobytej w przeszłości) i akceptowanie jego aktualnych celów, dążeń oraz intuicji. Jest to istotne, gdyż biografia poznawcza każdej jednostki jest odmienna, a warunki je powstawania rzutują na efektywność procesu uczenia się. Z kontekstowości biograficznej wynika bowiem, że:

1) w tych samych warunkach dopływu informacji różni uczniowie mogą skonstruować w umyśle różne struktury wiedzy,
2) te same elementy wiedzy opracowane i zapisane w różnych warunkach (np. przekaz nauczyciela versus rozwiązywanie problemu przez uczniów) może zostać zapisane na różne sposoby. Przy metodach podających jako wiedza statyczna, pamięciowa, a przy metodach problemowych jako wiedza dynamiczna, wywiedziona ze zrozumienia.

Kolejnym warunkiem konstruowania wiedzy jest **refleksja** (zarówno nauczyciela, jak i uczniów), która prowadzi do odpowiedzialnego i zaangażowanego procesu uczenia się. Jest ona rodzajem myślenia, ustawicznym namysłem, rozważaniem czegoś, dociekaniem, rodzajem teoretycznego rozumowania. Pomaga w oglądzie własnej pracy i podejmowaniu inicjatywy. Wyraża się na wiele sposobów:

a) w wielości interpretacji – uwzględnianiu wielu argumentów i alternatyw,
b) krytycznym osądzie – zdolności przewidywania i analizowania konsekwencji,
c) działaniach projektujących – uruchamianiu badania, poszukiwania, konstruowania rozwiązań.

W uczeniu się ma to wyraz w **preferowaniu sytuacji problemowych**, które podnoszą aktywność myślową uczniów i stymulują ich do wypracowywania własnych strategii rozwiązywania zadań oraz w łapaniu tzw. okazji do uczenia się, których bogactwo dostarcza otaczająca rzeczywistość, potrzeby dzieci i oczekiwania społeczne. Okazji do liczenia, czytania i pisania oraz szukania odpowiedzi na intrygujące uczniów pytania jest więc wiele. Refleksyjny nauczyciel będzie potrafił je dostrzegać, słuchając pytań i uczniowskich wątpliwości, które są najlepszą okazją do formułowania zadań problemowych i ich aktywnego rozwiązywania.

[15] H.R. Schaffer, Epizody wspólnego zaangażowania jako kontekst rozwoju poznawczego, [w:] Dziecko w świecie ludzi i przedmiotów, red. A. Brzezińska, G. Lutomski, Poznań 1994.

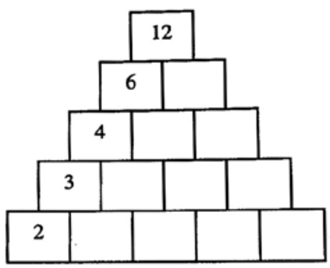
[16] D. Klus-Stańska, Wiedza i sposoby jej nabywania, [w:] Pedagogika wczesnoszkolna – dyskursy, problemy, rozwiązania, red. D. Klus-Stańska, M. Szczepska-Pustkowska, Wydawnictwo Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009, s. 480.

1.2. Aktywne uczenie się matematyki

Konstruktywistyczne podejście do rozwijania pojęć matematycznych prowokuje aktywne uczenie się matematyki. Wskazuje na to wiele aspektów, które są jednocześnie **konstytutywnymi cechami** tego podejścia:

- odwoływanie się do sytuacji realistycznych dla dzieci (gra w piłkę, porządkowanie zabawek, rozdawanie cukierków, poruszanie się po schodach, układanie mozaiki) i bazowanie na ich doświadczeniach i osobistej wiedzy, co ułatwi im rozumienie badanych zjawisk i analizowanie zadań, rozumienie tego, co, jak i dlaczego wykonują w określony sposób;
- pozostawienie dziecku swobody w wyborze stosowanej metody postępowania, „atakowanie" pojęć na takim poziomie abstrakcji, jaki jest w danym momencie dostępny dziecku, przy zachowaniu możliwości sięgania po konkret i manipulowania nim; traktowanie wszystkich metod jako równoprawnych, różniących się co najwyżej szybkością otrzymywania wyniku;
- stawianie na większe zaangażowanie dziecka (np. w szukanie metody), jego aktywność własną: działania podejmowanie osobiście, z własnej inicjatywy, samodzielnie i z dużym zrozumieniem, tego, co robią, co powoduje minimalizowanie niepowodzeń szkolnych i lęków przed uczeniem się matematyki;
- zaczynanie od działania dziecka i towarzyszącej temu wymiany uwag i pomysłów, korzystania z języka potocznego, który dopiero później, np. przy okazji rozwiązywania zadań uzupełniany jest językiem symboli; daje to naturalny układ, w którym uczeń najpierw poznaje sens danego symbolu, a dopiero potem odczuwa potrzebę jego wprowadzenia i posługiwania się nim; służą temu zadania łamigłówki, czy z pułapką, wymagające od ucznia znalezienia pomysłu na rozwiązanie danego zadania, a dopiero potem jego symboliczne ujmowanie[17]. Poniżej znajduje się jeden z takich przykładów.

25. Znając regułę wypełniania piramidek z poprzednich zadań, uzupełnij te poniżej:



26. Jakie liczby kryją się za literami. Liczby zapisane za pomocą cyfr oznaczają sumy kolumn i wersów.

a)

C	A	C	10
B	B	B	6
D	A	D	6
6	10	6	

b)

A	A	C	4
D	B	C	9
E	B	C	10
10	7	6	

[17] Zadanie z piramidką, jak również matematyczne kwadraty są przykładem zadań prowokujących aktywność dzieci. Zaczerpnięte zostały one z książki D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa 2004, s. 59 i 60. Przywołana pozycja zawiera również przykłady innych zadań rozwijających aktywność matematyczną dzieci.

– wykorzystywanie znajomości kontekstu zadania, co ułatwia zrozumienie tego, co jest w zadaniu dane, jak i czego dotyczy postawione w nim pytanie. W efekcie przyczynia się to do rozwijania umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych i czytania ze zrozumieniem;
– stosowanie rozmaitych gier i zabaw, które dostarczają uczniom okazji do ćwiczeń utrwalających, jak również motywują uczniów do działania, gdyż ich charakter podnosi atrakcyjność działań o charakterze matematycznym. Dodatkowo towarzyszy im rozwijanie umiejętności komunikowania się i współpracy, przestrzegania reguł i negocjowania, jak również tworzenia nowych problemów i realistycznych zadań tekstowych czy nawet klasycznych słupków ulokowanych w kontekście hipotetycznej rozgrywki[18]. Bardzo ciekawym rozwiązaniem w tym zakresie jest pomoc edukacyjna znana pod tytułem „Projekt piktografia" dostępny również w wersji Pakiet on-line[19]. Przykładowe karty pracy o charakterze problemowym zamieszczone są poniżej.

Klasowy kalendarz – czyli prowadzimy całoroczne obserwacje czasu i wydarzeń

Przed Tobą majowa kartka z kalendarza.

Maj

Pn	Wt	Sr	Cz	Pt	So	N
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1. Zaplanuj cały miesiąc tak, żebyś codziennie miał inne zajęcia (od poniedziałku do piątku), pamiętając, że chór i język angielski przedzielają zajęcia sportowe.
Zaprojektuj swoje piktogramy do oznaczenia zajęć.
Szachy / piłka nożna ……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
Język angielski …………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
Chór ……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
Pływanie ………………………………………………………………………………………

2. Czy wszystkich zajęć będzie tyle samo? Wyjaśnij, dlaczego?
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
3. Wymyśl inne zajęcia i zaplanuj je na cały miesiąc.
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Dni świąteczne:
1 maja – Święto Pracy
3 maja – Święto Konstytucji 3 Maja.

---

[18] M. Dąbrowski, O rozwijaniu umiejętności matematycznych w nauczaniu zintegrowanym, [w:] Kształcenie zintegrowane. Problemy teorii i praktyki, red. M. Żytko, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa 2002, s. 57.
[19] www.piktografia.pl z dnia 13.07.2015.

Rezultatem takiej zmiany w podejściu do uczenia się matematyki staje się zupełnie inny typ wiedzy niż ta, którą opisuje się jako wyspecjalizowaną odtwórczo czy wystandaryzowaną. Wiedzę taką można traktować, jako **rodzaj wiedzy osobiście zdobytej**, przeżytej, wywiedzionej z osobistego doświadczenia i działania. Nie jest efektem powielania, tego, co już zostało odkryte i co już wiadomo, ale tego, co wywiedzione z dociekania, ważenia problemu, nieustannego analizowania i modyfikowania dotychczasowych struktur poznawczych, tworzenia nowych wartości poznawczych. Jest krytycznym kwestionowaniem własnej wiedzy, co zapewnia jej świeżość i adekwatność wobec wymagań czasów i oczekiwań społecznych. Dzieje się tak, gdyż pokaźna wiedza nieformalna dziecka, duży bagaż doświadczeń zdobywanych podczas kontaktów z rówieśnikami, jak i z obcowania z dorosłymi, podczas zabawy i codziennych czynności jest naturalnym oparciem dla procesu uczenia się w szkole i stanowi jego punkt wyjścia przy poznawaniu przez dziecko nowego pojęcia i rozwijaniu nowych umiejętności. Wszystkie te naturalne sytuacje, bliskie dziecku (zabawa w sklep, projektowanie toru wyścigowego, konstruowanie budowli z figur geometrycznych budowli) są okazją do dzielenia się pomysłami, do rozmawiania i wspólnego, zaangażowanego uczenia się.

Zorientowana konstruktywistycznie edukacja matematyczna nie straszy, lecz zachęca, nie nudzi, lecz bawi, nie zamyka w schematach, lecz prowokuje do poszukiwania własnych strategii myślenia i działania wywiedzionych ze zrozumienia poznawanego zagadnienia.

Proces naturalnego kształtowania pojęć matematycznych (od doświadczeń osobistych do zrozumienia) sprzyja konstruowaniu przez uczniów wiedzy proceduralnej, tj. zdobywanej w toku działania, narastającej od środka, ulegającej rozwojowi w toku aktywności jednostki, na bieżąco weryfikowanej i aktualizowanej, odpowiednio do wzrostu doświadczeń w danej dziedzinie. Powszechne przekonanie, że nauczyciel ucznia musi najpierw czegoś nauczyć, coś mu przekazać, żeby ten rozumiał i coś wiedział, traci tu sens. Znaczenia nabiera natomiast moment stwarzania okazji do wykorzystywania nieformalnej wiedzy dzieci i jej wzbogacania o nowe doświadczenia, które zintegrowane z dotychczasową wiedzą staną się podstawą do uczenia się ze zrozumieniem. Oznacza to, że dziecko nauczy się znacznie więcej i chętniej, gdy okazje do uczenia się matematyki będą dla niego interesujące, znajdą odzwierciedlenie w rzeczywistości i sprowokują spontaniczną aktywność i badawczą ciekawość. Jak piszą D. Klus-Stańska i A. Kalinowska „aby wiedza matematyczna ucznia oznaczała matematyczne myślenie i rozumienie, a nie zbiór bezrefleksyjnie kolekcjonowanych ciągów czynności, uczeń musi rozpocząć od twórczych strategii osobistych zanim pozna formalne procedury działań”[20]. **Twórczość matematyczna** nie jest zatem dodatkiem, ale warunkiem osiągania odpowiednich efektów. Przykładem tego są zróżnicowane pod względem konstrukcyjnym zadania matematyczne o zróżnicowanej wartości poznawczej. Liczenie słupków matematycznych będzie więc jedynie trenowaniem gotowych przepisów na wykonanie zadania i usilnych prób zapamiętania wyznaczonych czynności (algorytmu rozwiązania), podczas, gdy zajmowanie się poszukiwaniem rozwiązań dla zagadek matematycznych przełoży się na stymulowanie zaawansowanych kompetencji i samodzielność myślową wspartą zrozumieniem.

---

[20] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa 2004, s. 29.

Różne wersje podręcznikowych „słupków"

Wstaw znaki +, -, x lub : tak aby działania były prawidłowe.

70 __ 10 = 7	**20 __ 5 = 25**	**30 __ 3 __ 3 = 30**
70 __ 10 = 80	**20 __ 5 = 100**	**20 __ 4 __ 4 = 20**
70 __ 10 = 60	**20 __ 5 = 15**	**60 __ 2 __ 0 = 30**

Wykonaj działania.

10 + 5 = ___	**20 - 5 = ___**	**20 + 5 = ___**
10 + 7 = ___	**20 - 7 = ___**	**20 + 7 = ___**

Często uatrakcyjniane są one rysunkowymi ozdobnikami, zdjęciami czy graficznymi dodatkami, co sprawia, że zadania wyglądają ładniej, może atrakcyjniej, ale nie zmienia się ich charakter i struktura. Są nadal zadaniami zamkniętymi, nieproblemowymi, o niskim poziomie stymulacji poznawczej.

Doskonałą alternatywą dla tradycyjnych zadań matematycznych są zadania zaproponowane w książce D. Klus-Stańskiej i A. Kalinowskiej, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów,* Żak, Warszawa 2004. Przykładem może być zadanie ze znakami rzymskimi rozwijające umiejętności matematyczne w obszarze techniki rachunkowej i giętkości myślenia.

Przełóż jedną zapałkę, tak by równanie było prawdziwe:

a) **IV+ I = VII**
b) **V+ VI = IX**
c) **I + III + II = IV**
d) **V + III – V = I**
e) **X + II = VII**
f) **V – III = VII**
g) **V + II = XII**
h) **V + III = III**[21]

Zamiast rozwiązywania infantylnych zadań tekstowych, w których matematyka ubrana jest w kolejne wersje środowiskowych asocjacji (zadania o jabłkach i śliwkach przy temacie Jesienne zbiory, czy o bałwankach przy temacie Zima, czy o wiosennych kwiatkach przy temacie Zwiastuny wiosny) pojawi się rozwiązywanie zadań problemowych o zabawnych fabułach i zróżnicowanej strukturze.

[21] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, Rozwijanie myślenia matematycznego…, op.cit., s. 61.

Przykład podręcznikowego zadania typowego (nieproblemowego) – karta pracy o tematyce matematyczno-przyrodniczej

1. Lis waży kilka kilogramów. Wilk jest od niego cięższy o 60 kg i waży 69 kg. Ile waży lis?

____ kg + 60 kg = 69 kg

Odp. ....
..

2. Bóbr waży kilkadziesiąt kilogramów. Zając jest od niego lżejszy o 28 kg i waży 9 kg. Ile waży bóbr?

_____ kg – 28 kg = 9 kg

Odp. ....
..

Przykłady zadań nietypowych (problemowych)

Na trzech drzewach siedziały wróble. Z pierwszego na drugie drzewo przefrunęły 2, a z drugiego na trzecie 1. Teraz na każdym drzewie siedzi po 5 ptaków. Ile ptaków siedziało na początku na każdym drzewie?[22]

Za 6 filiżanek i 6 talerzyków pani Irena zapłaciła 42 złote. Następnego dnia pani Irena dokupiła jeszcze 2 filiżanki i 6 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 42 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?

Dorota trzyma swoje książki na regale o trzech półkach. Najmniej książek ma na górnej półce. Na środkowej ma ich o 4 więcej, a na dolnej o 7 więcej niż na górnej. Łącznie ma 47 książek. Ile książek stoi na każdej z półek?[23]

W uczeniu się matematyki ma to wyraz w preferowaniu sytuacji problemowych, które podnoszą aktywność myślową dzieci i stymulują je do wypracowywania własnych strategii rozwiązania zadania, którym towarzyszy kontrola poznawcza i zrozumienie własnych działań. Zdaniem M. Dąbrowskiego każdy problem w matematyce to „zadanie, którego metody rozwiązania nie znamy, ale dysponujemy wiedzą wystarczającą do tego, aby metodę tę samodzielnie zbudować. Rozwiązując problem mamy okazję coś odkryć, zauważyć coś dla siebie nowego – wyjść poza dostarczone informacje. W efekcie problem to zadanie na rzeczywiste zastosowanie posiadanej wiedzy i sprawdzenie poziomu jej użyteczności"[24]. Najlepszym rozwiązaniem jest więc korzystanie z problemów, jako że te

[22] D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, Rozwijanie myślenia matematycznego..., op.cit., s. 120.

[23] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2008, s. 100.

[24] Ibidem, s. 133.

rozwijają matematyczną wyobraźnię, uczą niekonwencjonalnych sposobów rozwiązywania zadań, kształcą giętkość i oryginalność myślenia, prowokują samodzielność i poznawczą zaradność.

Dzięki problemowemu podejściu we wczesnym nauczaniu matematyki i z uwzględnieniem wcześniej wymienionych postulatów nauczania konstruktywistycznego możliwe staje się zastąpienie transmisyjnego przekazu wiedzy w postaci wyuczonych na pamięć gotowych wyników (np. tabliczki mnożenia) czy odtwarzanych strategii rozwiązywania zadań krok po kroku według ustalonego algorytmu podejściem heurystycznym. Zgodnie z tym ostatnim uczniowie samodzielnie budują zróżnicowane strategie obliczeniowe rozwijając umiejętności arytmetyczne i dostrzegając coraz bardziej znaczenie podstawowych działań matematycznych. Są bardziej zaradni matematycznie i życiowo. Rozumieją matematykę i potrafią ją stosować tak w sytuacjach szkolnych, jak i pozaszkolnych. Ich wiedza jest użyteczna, a zdobywanie jej ma dla nich sens.

2. Matematyka w szkole

Szkoła musi nadążać za młodym pokoleniem, musi zrozumieć, kto do niej wchodzi[25] – pisze D. Klus-Stańska. Musi w zgodzie z tym rozpoznaniem zaproponować ciekawe treści, odpowiedzieć wartościową ofertą metod uwzględniających te zmiany, racjonalnie dobieranych w warunkach, gdy wiedza pochodzi z różnych źródeł, jest powszechnie konstruowana w partnerskiej wymianie i udostępniana jako dobro powszechne. W ciągu ostatnich lat pojawiły się wysokiej klasy komputery, telefony komórkowe, telewizja satelitarna i cyfrowa, Internet, aparaty cyfrowe, smartfony, tablety. Dzieci z nimi obcują na co dzień. Ich poziom wiedzy nieformalnej jest nieporównywalnie wyższy niż kilkanaście lat temu. Tymczasem w szkole niewiele się zmienia, a od absolwenta klasy trzeciej oczekuje się mniej więcej tyle samo, co 20 lat temu od ucznia kończącego klasę pierwszą[26]. Poszczególne reformy systemu edukacji czy nowelizacje podstawy programowej są natomiast przykładem stopniowego usuwania kolejnych zagadnień matematycznych. Krążą na ten temat różne anegdoty i dowcipy, na przykład ten, którym posłużył się B. Śliwerskiego wypowiadając się krytycznie na temat polskiej edukacji:

> *Zna Pan taki dowcip? Zadanie z matematyki w latach 70. Rolnik miał 3,5 hektara pola, z hektara zebrał 40 kwintali pszenicy. Za kwintal dostanie w skupie 90 zł. Ile po sprzedaży wszystkich plonów zarobi rolnik? Zadanie z lat 90. Rolnik miał 3 hektary. Z jednego zebrał 40 kwintali pszenicy wartej 3,6 tys. zł. Ile zarobi w sumie rolnik? 2000 ro. – jeśli rolnik zasieje pszenicę, zarobi 10 tys. zł, jeśli kukurydzę 9 tys. zł. Co się bardziej mu opłaca? Zadanie z 2013 r. Jeśli rolnik zrezygnuje z uprawy, z unijnej dotacji otrzyma 11 tys. zł. Opisz korzyści unijnego programu rolnego"*[27].

Jak w tej sytuacji jest z matematyką w szkole? Ogólnie, należy do jednego z bardziej zaniedbanych przedmiotów nauczania. Sieje grozę wśród uczniów, wzmacnianą grozą nauczycieli ją wykładających. Ujawnia się w analfabetyzmie matematycznym i fobiach szkolnych, opisywanych już we wcześniejszych fragmentach tekstu.

W szukaniu przyczyn tego stanu, jako jeden z aspektów, dość pobieżnej analizy, proponuję przyjrzeć się aktualnej podstawie programowej w zakresie edukacji matematycznej i podręcznikowym propozycjom jej realizowania. Ich opis w zestawieniu z kompetencjami kluczowymi obywatela na miarę XXI wieku może okazać się bowiem ważny dla ukazania przepaści między szkolną wersją edukacji matematycznej a niezbędnymi kompetencjami warunkującymi zaradność intelektualną i świadomość użyteczności wiedzy matematycznej w codziennych sytuacjach życiowych i ich zastosowaniu w przyszłości.

[25] D. Klus-Stańska, Cyfrowi tubylcy w szkole cyfrowych imigrantów, czyli awatar w świecie Ptysia i Balbinki, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2013, nr 4(23), s. 13.

[26] Wyniki ustalone na podstawie badań M. Dąbrowski, O matematycznych wynikach polskich trzecioklasistów w badaniach TIMSS, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2013, nr 4(23), s. 36.

[27] B. Śliwerski, Familiada edukacyjna, „Dziennik. Gazeta Prawna", 26-28 kwietnia 2013, nr 82(3472), s. 14.

2.1. Treści programowe i podręcznikowe

Matematyka w najnowszej wersji podstawy programowej dla klas I-III obejmuje następujące zagadnienia:

Uczeń:

1) **klasyfikuje** obiekty i tworzy proste serie; dostrzega i kontynuuje regularności;
2) **liczy** (w przód i w tył) od danej liczby po 1, dziesiątkami od danej liczby w zakresie 100 i setkami od danej liczby w zakresie 1000;
3) zapisuje cyframi i **odczytuje liczby w zakresie 1000**; rozumie dziesiątkowy system pozycyjny;
4) ustala **równoliczność** porównywanych zestawów elementów mimo obserwowanych zmian w ich układzie; porównuje dowolne dwie liczby w zakresie 1000 (słownie i z użyciem znaków <, >, =);
5) **dodaje i odejmuje liczby w zakresie 100** (bez algorytmów działań pisemnych); sprawdza wyniki odejmowania za pomocą dodawania;
6) **mnoży i dzieli liczby w zakresie tabliczki mnożenia** (bez algorytmów działań pisemnych); podaje z pamięci iloczyny; sprawdza wyniki dzielenia za pomocą mnożenia;
7) **rozwiązuje łatwe równania jednodziałaniowe** z niewiadomą w postaci okienka (bez przenoszenia na drugą stronę);
8) **rozwiązuje proste zadania tekstowe** (w tym zadania na porównywanie różnicowe, ale bez porównywania ilorazowego);
9) wykonuje **łatwe obliczenia pieniężne** (cena, ilość, wartość) i radzi sobie w sytuacjach codziennych wymagających takich umiejętności; zna będące w obiegu monety i banknoty; zna wartość nabywczą pieniędzy; rozumie, czym jest dług;
10) **mierzy i zapisuje wynik pomiaru** długości, szerokości i wysokości przedmiotów oraz odległości; posługuje się jednostkami: **milimetr, centymetr, metr**; wykonuje łatwe obliczenia dotyczące tych miar (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych); używa pojęcia **kilometr** w sytuacjach życiowych, np. jechaliśmy autobusem 27 kilometrów (bez zamiany na metry);
11) **waży przedmioty**, różnicuje przedmioty cięższe, lżejsze; **używa określeń: kilogram, pół kilograma, dekagram, gram**; wykonuje łatwe obliczenia, używając tych miar (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych);
12) **odmierza płyny różnymi miarkami**; używa określeń: **litr, pół litra, ćwierć litra**;
13) **odczytuje temperaturę** (bez konieczności posługiwania się liczbami ujemnymi, np. 5 stopni mrozu, 3 stopnie poniżej zera);
14) odczytuje i zapisuje **liczby w systemie rzymskim od I do XII**;
15) podaje i zapisuje daty; zna kolejność dni tygodnia i miesięcy; porządkuje chronologicznie daty; **wykonuje obliczenia kalendarzowe** w sytuacjach życiowych; **odczytuje wskazania zegarów w systemach:** 12- i 24-godzinnym, wyświetlających cyfry i ze wskazówkami; posługuje się pojęciami: godzina, pół godziny, kwadrans, minuta; wykonuje proste obliczenia zegarowe;
16) rozpoznaje i nazywa **koła, prostokąty (w tym kwadraty) i trójkąty** (również położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie); rysuje odcinki o podanej długości; oblicza obwody trójkątów i prostokątów (bez wyrażeń dwumianowanych i zamiany jednostek w obliczeniach formalnych);

17) wyprowadza kierunki od siebie i innych osób; określa położenie obiektów względem obranego obiektu, używając określeń: **góra, dół, przód, tył, w prawo, w lewo** oraz ich kombinacji;
18) **dostrzega symetrię** (np. w rysunku motyla); rysuje drugą połowę symetrycznej figury;
19) zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej; rysuje figury w powiększeniu i w pomniejszeniu[28].

Treści matematyczne ujęte są w języku nakazów lub stwierdzeń paraliżujących aktywność uczniów, bo zawężają ją do określonych obszarów (dodawanie i odejmowanie do 100; wykonywanie prostych zadań tekstowych, itd.). Często występują też określenia wyraźnie zaniżające umiejętności i kompetencje dzieci; zazwyczaj mowa o **łatwych** obliczeniach, **podstawowych** umiejętnościach, **prostych** zadaniach tekstowych, **niewielkim zakresie** liczbowym, itd., co potwierdza zaniżanie oczekiwań i wymagań wobec polskich dzieci w odniesieniu do oczekiwań ich rówieśników na świecie. W zestawieniu z zagadnieniami matematycznymi zaczerpniętymi z międzynarodowej oferty programów nauczania matematyki wykorzystywanych przez państwa uczestniczące w badaniach TIMSS, okazuje się, że „nasze programy nauczania dla klas 1-3 zawierają jedynie około 1/3 pojęć i umiejętności objętych badaniem (…). Powtórzmy to jeszcze raz: nasi uczniowie w ciągu czterech początkowych lat szkolnej nauki obcują z „uboższą" tematyką matematyczną niż dzieci we wszystkich badanych krajach"[29]. Mowa natomiast o takich państwach, jak: Hong Kong, Tajwan, Belgia, Anglia, Portugalia, Austria, Włochy, Malta, Nowa Zelandia, Turcja, Gruzja, Iran, itd.

Typowemu absolwentowi polskiej szkoły początki edukacji matematycznej kojarzą się przede wszystkim z setkami słupków do obliczenia, kaligrafowanych cyfr i wypełnianych pod dyktando nauczyciela serii odtwórczych zadań w zeszytach ćwiczeń. Potwierdzeniem tego są również propozycje książkowe naznaczone wieloma błędami i schematami deformującymi myślenie matematyczne dzieci. Do najczęściej występujących można zaliczyć tzw. **szum instruktażowy**[30].

Przytoczone poniżej zadnie jest tego przykładem. Ma charakter precyzyjnie opracowanego toku metodycznego. Każda czynność ucznia jest w nim bardzo szczegółowo określona przez sekwencję kroków, które musi wykonać, aby zadanie uznane zostało za poprawnie wykonane. Trudno w nim pozbyć się uczucia zagubienia intelektualnego, gdyż cała aktywność ucznia skoncentrowana jest jedynie na odkodowywaniu zaplanowanych kroków. Dziecko jest w nim bierne poznawczo, bo jego aktywność umysłowa polega bardziej na odgadywaniu, jaką czynność ma wykonać niż na jej projektowaniu czy planowaniu własnej strategii myślenia i działania. Uszczegółowienie zadania sprawia, że trudno mu skoncentrować się na jego ogólnym sensie. Nie musi poszukiwać metody rozwiązania, bo ta została mu już podana, nie musi rozumieć zadania, bo ktoś już pomyślał i zrozumiał za niego. W efekcie dzieci stają się bezradne matematycznie i uporczywie czekają przy każdym zadaniu na instrukcję jego wykonania podaną przez nauczyciela lub podpowie-

[28] Podstawa programowa wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dziennik Ustaw RP z 18.06.2014, poz. 803, s. 15.
[29] M. Dąbrowski, O matematycznych wynikach…, op.cit., s. 34.
[30] D. Klus-Stańska, M. Nowicka, Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej, WSiP, Warszawa 2005, s. 111.

dzianą przez podręcznik. Jednocześnie z wielu zadań wycofują się, gdy te nie posiadają instrukcji jego wykonania.

1. Ile tu truskawek? A ile tu?

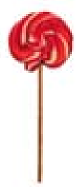
Dodajemy: 3 + 2 = 5
Tu 5 truskawek.

2. Tu biegają 2 konie, a tam 1 koń.
Ile biega koni?

2 + 1 = ____
Biegają ____ konie.

Kolejnym niedociągnięciem metodycznym matematycznych zadań podręcznikowych jest **odtwórcze wykonawstwo**[31].

1. Adaś ma 1 lizaka, Michał ma 1 lizaka, a Marek ma 2 lizaki.



Ile mają lizaków?
1+1+… = …
Mają ……. lizaki.

Charakteryzuje je nieustanna ingerencja w myślenie dziecka. Podobnie, jak w poprzednim przykładzie wykonawca zadania musi podporządkować się gotowej instrukcji, która

[31] Ibidem, s. 112.

zwalnia ucznia z jakiegokolwiek myślenia. Wystarczy mechaniczne kojarzenia faktów, aby osiągnąć cel. W zadaniach tego typu dzieci liczą, ale nie rozumieją, uzupełniają luki w zadaniach, ale ich nie czytają, dorysowują brakujące elementy, ale nie wiedzą, dlaczego klasyfikują, ale nie rozumieją kryterium takiego sposobu porządkowania.

Następnym niedociągnięciem zadań podręcznikowych jest tzw. orientacja na wynik i traktowanie aktywności dziecka wyłącznie jako środka do osiągania celów lekcji. Najważniejsze jest, aby uczeń pracował szybko, wykonywał dużo zadań (najczęściej zamkniętych, odtwórczych), gdyż tempo i ilość wykonanych zadań o identycznej konstrukcji, traktowana jest jako wskaźnik efektywności nauczania. Najlepszym tego przykładem są różne wersje słupków matematycznych. Niekiedy ozdabianych rysunkami, innym razem naklejkami, innym rebusami. Ich istota jest jednak zawsze taka sama – zastosować algorytm i trenować technikę obliczeniową.

Oblicz wyniki. Uporządkuj je rosnąco. Ułóż z sylab zdanie. Zapisz je.

cje 17 + 3 = ___	chać 9 + 6 = ____
lu 15 – 5 = ___	wa 9 + 9 = ____
my 6+ 7 = ___	ka 12 + 7 = ____
je 20 – 6 = ___	na 9 + 8 = ____
bi 8 + 4 = ___	

Efektem zadań tego typu jest ograniczanie inicjatywy dzieci, unifikacja ich myślenia, przyjmowanie zachowań odtwórczych, koncentracja na powielaniu schematów. Aktywność dziecka sprowadzana jest w nich jedynie do przepisywania zamiast samodzielnego układania zadania, do uzupełniania zamiast konstruowania własnego sposobu rozwiązania, do zapamiętywania zamiast myślenia, do powielania schematu zamiast rozumienia. Poniżej przedstawiam kilka przykładów zadań odtwórczych, które wywołują opisywany wcześniej rodzaj aktywności.

Wykonaj rysunki do działań.

4 = 2 + 2

10 = 8 + 2

Pokoloruj pytanie pasujące do zadania. Rozwiąż zadanie.

Asia ma 7 monet pięciozłotowych.

Ile monet ma Asia?

Jakie monety ma Asia?

Ile pieniędzy ma Asia?

Ile reszty jej zostało?

Przytoczone przykłady zadań nie pozwalają na samodzielne poszukiwania uczniowskie. Raczej są myśleniem na skróty, aby pokierować ucznia ku zapisowi, ku regule, ku wzorowi. W tych okolicznościach praca indywidualna nie ma żadnych znamion samodzielności intelektualnej. Jest raczej opanowaniem techniki i jej regularnym trenowaniem, potwierdzającym fakt wyposażania uczniów w wiedzę matematyczną, z której nie potrafią oni korzystać bez wsparcia tzw. podpowiedzi. Ponadto oferowane zadania nie są dla ucznia żadnym wyzwaniem. Są nudne, monotonne, nie prowokują do działania. Zamiast myślenia i zrozumienia uruchamiają jedynie bierność i niechęć do matematyki.

2.2. Kompetencje kluczowe a edukacja matematyczna dzieci

Zgodnie z zaleceniami Parlamentu Europejskiego i Rady Unii Europejskiej w obszarze kompetencji kluczowych znajdują się również kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne. **Kompetencje matematyczne** „obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji. Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele)”[32].

Przywołane przykłady kompetencji wskazują na **uczenie się matematyki zorientowane na proces.** Matematyka nie jest bowiem rozumiana jako zbiór pojęć i twierdzeń, ale jako sposób myślenia, w którym najważniejszą rolę odgrywa szukanie zależności, nowych możliwości i relacji między danymi oraz poszukiwanie i wykorzystywanie takich strategii, jak odnajdywanie podobieństw, działanie przybliżone, odkrywanie własności, wynajdywanie własnych sposobów obliczeniowych. Każde z nich ma sprzyjać i prowadzić do lepszego zrozumienia pojęć i przemyślanego stosowania wiedzy matematycznej, odkrywania jej praktycznego zastosowania wynikającego z sytuacji codziennych i ich praktycznego stosowania.

[32] Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (2006/962/WE), Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej z 30.12.2006, L 394/15.

Z uszczegółowienia powyższych kompetencji wynikają kolejne umiejętności i niezbędna wiedza obejmująca: **solidną umiejętność liczenia**, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, **rozumienie terminów i pojęć matematycznych**, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź[33]. W takim podejściu do szkolnej nauki matematyki podkreśla się jej praktyczny wymiar, użyteczność wiedzy i wielość okazji do zastosowania obliczeń matematycznych w sytuacjach codziennych. W przywołanym dokumencie odczytać można również, że osoba ucząca się matematyki „powinna posiadać **umiejętność stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych**, a także śledzenia i oceniania ciągów argumentów. Powinna ona być w stanie rozumować w matematyczny sposób, rozumieć dowód matematyczny i komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich pomocy"[34].

Przywołany model kompetencji kwestionuje transmisyjne podejście do nauczania matematyki, w którym dla ucznia przygotowuje się ściśle określony zasób informacji do możliwie dokładnego opanowania i szczegółowego przyswojenia dzięki wyjaśnieniu i pośrednictwu nauczyciela. Jest on przeciwny mentalnej bierności uczniów wyrażającej się w dobrym opanowaniu, dokładnym zapamiętaniu czy sprawnym zastosowaniu pojęć bez ich uprzedniego zrozumienia, osobistego oswojenia, przyczyniającego się do spontanicznego sięgania po taką wiedzę matematyczną w rozmaitych sytuacjach szkolnych i pozaszkolnych. Proponowany model kompetencji nawiązuje do konstruktywistycznej wersji edukacji podkreślając osobistą aktywność uczniów i ich samodzielny udział w poszukiwaniu intelektualnych strategii radzenia sobie z problemami matematycznymi na lekcjach i ich odpowiednikami w życiu codziennym.

Zestawienie zaleceń Parlamentu Europejskiego w sprawie kompetencji kluczowych z założeniami polskiej podstawy programowej w zakresie edukacji matematycznej odsłania, w odniesieniu do ostatniego dokumentu, wielość niedociągnięć i niejasności oraz obszary tzw. odporności na zmiany. Najbardziej niebezpieczny jest tradycyjny model edukacji matematycznej oparty na algorytmizowaniu czynności uczniów i myślenie o ich wiedzy w kategoriach struktur odtwórczych nastawionych na zapamiętywanie treści i ćwiczenie umiejętności nawet przy braku zrozumienia ich zastosowania oraz sensu wykorzystywania. Charakterystyczna jest dla niego rozbudowana kierownicza rola nauczyciela, przekazującego określony programem zasób wiadomości. Mimo że powszechnie zwraca się uwagę, że taki system nauczania, w którym nauczyciel pokazuje, tłumaczy, instruuje, a uczniowie słuchają, powtarzają, naśladują wręcz blokuje krytyczność i elastyczność myślenia, ciągle jest w grupie dominujących metod nauczania. Jak piszą D. Klus-Stańska i M. Nowicka „nauczyciel prezentuje algorytm lub wyjaśnia go, wiodąc uczniów ku tzw. poprawnej odpowiedzi za pomocą pogadanki szkolnej. Następnie uczeń wykonuje szereg standaryzowanych ćwiczeń, które mają algorytm utrwalić i zautomatyzować"[35]. Jakość takich kompetencji jest natomiast dyskusyjna i rodzi wiele obaw, co do twórczych i samodzielnych postaw uczących się oraz świadomości użyteczności zdobywanej wiedzy matematycznej.

33 Ibidem, L 394/15.

34 Ibidem.

35 D. Klus-Stańska, M. Nowicka, Sensy i bezsensy…, op.cit., s. 140.

3. Mity w edukacji matematycznej młodszych uczniów

Aspekt mitu w edukacji podejmuje wielu autorów. Jest on obecny w pracach M. Dudzikowej[36] jako przejaw nieadekwatności szkoły wobec rzeczywistości i oczekiwań społecznych. Pisze o nim Z. Kwieciński[37] jako o typie złudzeń i błędnych aksjomatach, co ilustruje:

– mitem jednej słusznej drogi, gdy odgórnie narzucone cele realizuje się utartymi, odtwórczymi strategiami ich realizacji,
– mitem kaganka oświaty, gdy w szkole popularyzuje się jedynie obiektywną wiedzę, ustaloną poza oczekiwaniami i możliwościami dzieci oraz ich osobistym potencjałem, przeznaczoną wyłącznie do przekazu,
– mitem radyklanej zmiany, gdy zachodzące „przeobrażenia" są bardzo powolne i jedynie powierzchowne oraz prowadzą do pogłębiania się rozbieżności świata szkolnego i życia,
– mitem sprawstwa, innowacji i nowatorstwa metodycznego, gdy zmieniać oznacza najczęściej inaczej nazywać, bez radykalnej zmiany w stosowanych rozwiązaniach.

Tkwienie w tych mitach sprawia, że szkoła nie jest przygotowana do wspomagania rozwoju. Dopuszcza natomiast rozwój tylko do pułapu norm systemu, którego jest strażniczką. Niebezpieczeństwo owych mitów prowadzi więc do kłamstw w obszarze myślenia o możliwościach edukacyjnego oddziaływania szkoły, co powoduje marnowanie możliwości dzieci, które głównie ćwiczone są w rywalizacji i w ukryty sposób naznaczane mianem nieudaczników czy przeciętnych prymusów[38].

D. Klus-Stańska mit w edukacji wiąże natomiast ze zjawiskiem pozorowania, co ilustruje terminem imitacja. Rozumie przez niego wszelkie przejawy fałszowania rzeczywistości, udawania i nieadekwatności[39]. Zauważa, że imitacja jest wszechobecnym elementem polskiej szkoły, konsekwencji inercyjnego pozostawania pozornej „rzeczywistości założeniowej", gdy w ślad za przyjmowanymi bezrefleksyjnie nowymi trendami edukacyjnymi nie pojawiają się adekwatne zmiany w obszarze funkcjonowania szkoły, form jej działania, rozwiązań w obszarze kultury dydaktycznej szkoły i jej metodycznych odpowiedników. A. Nalaskowski nazywa to „nieprawdą szkoły"[40], kiedy szkoła kojarzona jest przez uczniów głównie z miejscem, w którym trzeba zaspokoić poczucie spełnienia misji przez dorosłych, nie zaś miejsce odkrywania świata, widzenia szans rozwojowych, doceniania dziecka i wspierania jego potencjału z zamiłowaniem do wiedzy.

[36] M. Dudzikowa, Mit o szkole jako miejscu wszechstronnego rozwoju ucznia. Eseje etnopedagogiczne, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2001.
[37] Z. Kwieciński, Socjopatologia edukacji, Mazurska Wszechnica Nauczycielska w Olecku, Olecko 1995, s. 70.
[38] Ibidem, s. 75.
[39] D. Klus-Stańska, Rzecz o ryzyku kulturowej nieadekwatności edukacji szkolnej, „Forum Oświatowe" 2005, nr 1(32), s. 34; eadem, Twórcze myślenie uczniów – mity, nieporozumienia, możliwości, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2008, nr 1(7), s. 117.
[40] A. Nalaskowski, O nieobowiązkowy kształt szkoły, [w:] Kontestacje pedagogiczne, red. B. Śliwerski, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 1993, s. 243.

W edukacji matematycznej dzieci daje się również dostrzec wiele złudzeń, błędnych sposobów postrzegania aktywności dziecka i jego możliwości, co więcej, nie obce jest zjawisko pozorowania uczenia się matematyki. Jest to kwestia bardzo poważnie zaburzająca myślenie o edukacji matematycznej dzieci, co poniżej scharakteryzuję w postaci kilku mitów i możliwości ich zastąpienia rozwiązaniami realnymi i respektującymi potrzeby poznawcze młodszych uczniów.

3.1. Matematyki zaczynamy się uczyć dopiero w szkole

Przyjęło się mawiać, że prawdziwa matematyka rozpoczyna się dopiero w szkole, bo wtedy są liczby, działania, obliczenia, wzory, schematy, rysunki, figury geometryczne. To powszechne przekonanie wydaje się być jednak w sprzeczności ze zmatematyzowaną wersją rzeczywistości, w której każdy człowiek żyje od urodzenia. Towarzyszy mu wiele elementów matematyki. Wystarczy przyjrzeć się otaczającej człowieka rzeczywistości, aby dostrzec w niej ogromną liczbę sytuacji, w których sięgamy po naszą wiedzę i umiejętności matematyczne:

- orientacja w przestrzeni, gdy dziecko rozgląda się w pokoju w poszukiwaniu zabawek, gdy szuka kolegów i koleżanek na placu zabaw, gdy konstruuje w piaskownicy tor wyścigów samochodowych,
- orientacja w schemacie ciała, gdy odróżnia prawą część ciała od lewej, gdy tłumaczy komuś drogę do szkoły, gdy projektuje strój dla swojej lalki,
- klasyfikowanie, gdy potrafi wyróżniać cechy (kolor, kształt, wielkość, przeznaczenie przedmiotu) do klasyfikowania przedmiotów podczas rzeczywistego porządkowania zabawek czy uzupełniania kolekcji znaczków, limitowanych kart piłkarskich z serii Champion Ligue, układa książki na półce,
- rytm i ornamenty, gdy układa kolorowe mozaiki, czy konstruuje budowle z klocków, badając ich właściwości, planuje swój dzień,
- figury geometryczne, gdy porusza się w świecie gier komputerowych, rozgrywek planszowych, projektuje przejście dla pieszych i opisuje je znakami drogowymi,
- liczenie i działanie na liczbach, gdy trzeba policzyć pieniądze w skarbonce, zapłacić za ulubione lody, rozdzielić po równo cukierki między swoich kolegów, ustalić kolejność uczestników podczas podwórkowych wyścigów, poruszać się windą itd.

Wszystkie z tych sytuacji są dostępne dziecku na długo wcześniej niż pójdzie do szkoły. Przy okazji takich konkretnych działań, które prowokują je do myślenia, wartościowania, porównywania, analizowania, klasyfikowania, argumentowania, mówienia, słuchania, badania kontekstów tworzy się ich osobista wiedza matematyczna, wzbogaca zasób doświadczeń, które są niezastąpione w kształtowaniu pojęć matematycznych. Stanowią one budulec dla zorganizowanych struktur poznawczych, pamiętając, że w umyśle zapisują się na trwałe tylko te spośród nauczanych treści, które zostaną zintegrowane z żywymi, naturalnymi strukturami wiedzy. Ich proceduralny charakter sprawia, że wiedza dzieci jest osobiście aktywizowana, ulega rozwojowi od wewnątrz, zachowuje związek z logiką wiedzy publicznej i dzięki temu w dużej mierze zachowuje swoją plastyczność i kreatywność.

Myślenie, iż prawdziwa matematyka zaczyna się w szkole jest więc błędem, który trzeba wyeliminować z nauczycielskiego podejścia do edukacji matematycznej, zastępując je szacunkiem i zaufaniem do wiedzotwórczych kompetencji dzieci i ich wykorzystywania w konstruowaniu pojęć. Ogromnego znaczenia nabiera więc wówczas korzystanie z doświadczenia uczącego się, jak również stwarzanie okazji do zdobywania doświadczeń w nauczanej dziedzinie i aktywizowania osobistej perspektywy uczniów.

3.2. Uczenie się na konkretach jest zaprzeczeniem prawdziwej matematyki

Zgodnie z teorią reprezentacji wiedzy J. Brunera wiedza może być ujmowana w sposób enaktywny, ikoniczny i symboliczny. Pierwszy sposób reprezentacji zdarzeń dokonywany jest za pośrednictwem odpowiednich reakcji ruchowych, jak działanie na konkretach, manipulacja określonymi elementami. Reprezentacja ikoniczna ujawnia się za pomocą wykorzystywania przez dziecko syntetycznych obrazów, ilustracji, piktogramów. Ostatnia z wymienionych reprezentacji wiedzy – symboliczna polega na kodowaniu zdarzeń za pomocą słów (języka mówionego i pisanego) oraz innych symboli jak np. cyfry, liczby i znaki matematyczne dodawania, odejmowania, dzielenia, mnożenia, i inne. Jednocześnie bardzo ważne jest umiejętne przechodzenie z jednego poziomu reprezentacji na drugi i integrowanie tych doświadczeń na poziomie symbolicznym.

Niestety nie docenia się faktu, że najkorzystniejsze dla dziecka jest uczenie się doprowadzające do posługiwania się symbolem, a nie od symbolu zaczynające się. A. Kalinowska pisze, że w myśleniu wielu nauczycieli wczesnej edukacji w centrum uczenia się matematyki jest myślenie symboliczne, utożsamiane z właściwym myśleniem[41]. Błąd polega na tym, że wielu nauczycieli zapomina, że myślenie symboliczne jest etapem docelowym, a nie punktem wyjścia. Aby było możliwe korzystanie przez dzieci z myślenia symbolicznego, konieczne jest zaakceptowanie faktu, że wyrasta ono z wcześniejszych doświadczeń dziecka – doświadczeń manipulacyjnych, które dzieci zdobywają podczas codziennych zajęć, jak przeliczanie, manipulowanie przedmiotami, klasyfikowanie, zestawianie. Dla dorosłych są one infantylne. Dla dzieci są szansą dla tworzenia się w ich umysłach pojęć matematycznych. Oznacza to, że uczniowie w klasach I-III nie tylko powinni mieć możliwość manipulowania konkretami, ale co ważniejsze uczyć się, że jest to proces niezbędny w rozwijaniu myślenia. Ważną uwagą dla nauczycieli jest więc, aby pamiętali, że działania na konkretach nie powinny być traktowane jako „ostatnia deska ratunku" dla bardzo słabego ucznia, ale jako niezbędna sytuacja dla każdego dziecka.

Niestety wielu nauczycieli nie respektuje tej prawidłowości. Wręcz są oni przekonani, że dzieci w klasie pierwszej powinny odzwyczajać się od liczenia na konkretach, co prowadzi do wielu błędów, a dalej uczniowskich niepowodzeń i niechęci do uczenia się matematyki. M. Dąbrowski do najczęściej popełnianych przez nauczycieli błędów zalicza chętne sięganie po przekaz werbalny z dużą ilością symboliki[42], przyjmując zasadę najpierw definicja, potem sens. Tymczasem z badań psychologów i pedagogów wynika, że korzystniejsze dla dzieci jest podejście drugie: najpierw sens, potem nazwa czy symbol. Dla metodyki matematyki oznacza to takie „organizowanie procesu uczenia się, aby dziecko zaczynało swoje myślenie i działanie, o ile tylko odczuje taką potrzebę, na poziomie enaktywnym

[41] A. Kalinowska, Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2010.

[42] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć…, op.cit., s. 11.

oraz ikonicznym po to, aby mogło być aktywne intelektualnie i ze swoich działań mogło wydobywać sens tego, co jest naszym edukacyjnym celem”[43]. Właściwa nazwa, pojęcie, symbol powinno więc pojawić się dopiero wówczas, kiedy dziecko wie i rozumie, co one będą oznaczać. Dopiero wówczas jest ono gotowe zrozumieć i zapamiętać poznawane pojęcie czy symbol i jest gotowe do posługiwania się nim. Zdaniem wybitnych matematyków, jak R. Thom[44] język matematyki (nazwy i symbole) – jest tworzony, aby ułatwić komunikowanie się, a nie je skomplikować. Będzie on dobrze pełnił swoją funkcję, gdy sens pojęć i symboli będzie poprzedzał ich nazwy. Zatem uczenie się na konkretach nie jest zaprzeczeniem uczenia się matematyki, lecz jej niezbywalnym warunkiem. Najpierw sens i zrozumienie, a potem pojęcie!

3.3. Wyćwiczony sposób postępowania jest niezawodny i umożliwia rozwiązywanie wszystkich zadań danego typu

W dydaktyce matematyki wymienia się kilka podejść do uczenia się i towarzyszących im rodzajów myślenia. Najczęściej wskazuje się na sposób relacyjny i instrumentalny[45]. Pierwszy z nich rozumiany jest jako poznanie rozumowania, które prowadzi do określonego uogólnienia, zasady, twierdzenia czy reguły. Dziecko samo odkrywa regułę, staje się jej współtwórcą, a nie tylko biernym odbiorcą i uczestnikiem treningu zapamiętywania. Podejście instrumentalne jest jego zaprzeczeniem. Zakłada opanowanie przez dziecko reguł, algorytmów i posługiwanie się nimi w określonych sytuacjach.

Polska szkoła uczy matematyki w sposób instrumentalny, kładąc zdecydowanie mniejszy nacisk na jej relacyjne rozumienia lub zupełnie pomijając tę kwestię. W efekcie utrudnia się lub wręcz uniemożliwia transfer wiedzy i umiejętności na sytuacje inne niż te zapamiętane z zajęć szkolnych. Obniża się również użyteczność zdobywanej wiedzy w szkole i sens jej wykorzystywania w sytuacjach pozaszkolnych. Opiera edukację na utartych schematach myślowych i precyzyjnie określonych algorytmach.

Tymczasem z badań psychologów wynika, że mózg dziecka nie znosi schematów. Rozszerzająca się od kilkudziesięciu lat wiedza z tego zakresu pokazuje, że „gdy nauczyciel prowadzi zajęcia według ustalonego schematu, niewielkie są szanse, że dzieci rzeczywiście się czegoś od niego nauczą. Dzieje się tak ponieważ schemat nie może zaskoczyć i prawie nigdy nie jest dla ucznia interesujący (…). Choć da się zmusić dzieci do tego, by siedziały w ławce i „nie przeszkadzały”, to nie da się ich ani prośbą, ani groźbą skłonić, by to, co słyszą uznały za intersujące i ważne. Mózg nie daje się ani przekonać, ani oszukać”[46]. Dla metodyki matematyki oznacza to konieczność modyfikowania metod nauczania i stymulowania aktywności uczniów. Uczniów zainteresuje bowiem tylko kreatywny nauczyciel, który unikając schematów i wychodząc poza nie, czyli dając dzieciom to, czego w danym momencie się nie spodziewają sprawi, że dzieci nabiorą przekonania, iż matematyka może być intersująca, a wiedza z niej pochodząca użyteczna i dla nich wartościowa.

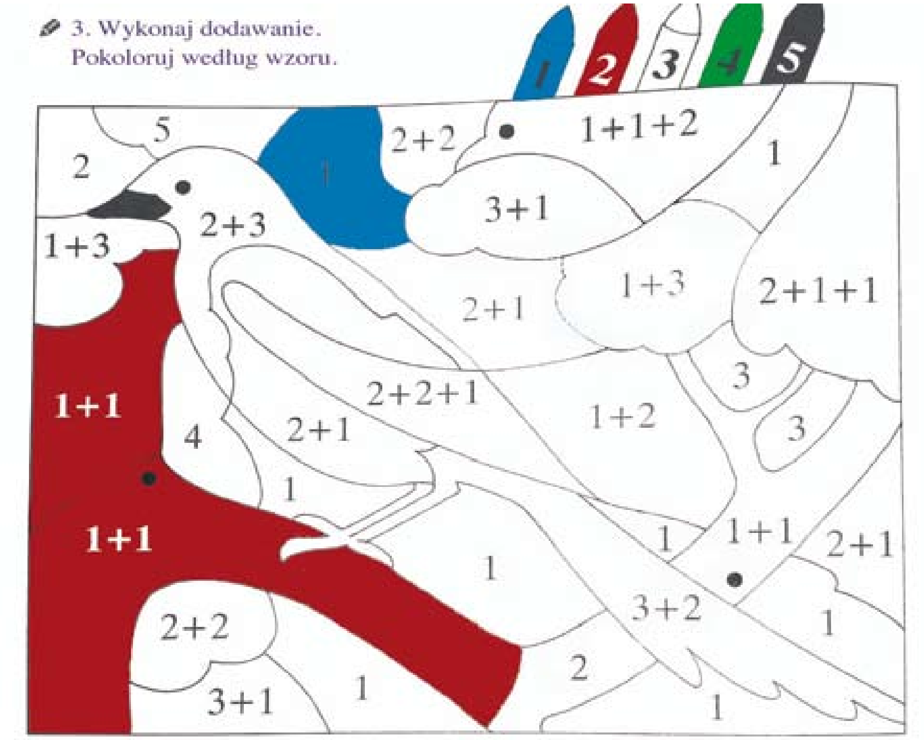
[43] Ibidem, s. 11.

[44] R. Thom, Matematyka „nowoczesna” – pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, „Wiadomości matematyczne”, XVIII, 1974.

[45] Program edukacyjny „Gramy w piktogramy” – pomysł na wspieranie edukacji matematycznej dzieci i jego wykorzystanie w praktyce szkolnej, „Problemy Wczesnej Edukacji” (materiał w druku).

[46] N. Minge, K. Minge, Wolność od schematów, „Psychologia w Szkole” 2015, nr 1(47), s. 6.

Dla uczenia się matematyki istotne znaczenie ma również głębokość przetwarzania – czyli w dużym uproszczeniu to, co uczeń może zrobić z daną informacją. Jeżeli tylko ją przeczyta lub wysłucha, uzupełni brakujące elementy, jak w zadaniach z lukami lub w formie kolorowanek czy wykona według podanego algorytmu działania to mało prawdopodobne, że taki sposób zapamięta, a jeszcze mniej prawdopodobne, że go zrozumie, a następnie w kolejnych sytuacjach zastosuje.

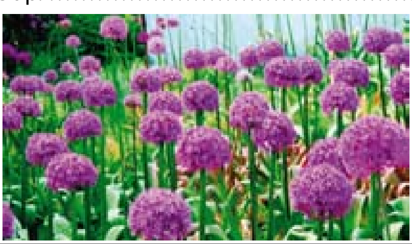


Asia i Dawid pomagali cioci sadzić kwiaty. Asia posadziła w 7 rzędach po 3 kwiaty,
a Dawid w 3 rzędach po 7 kwiatów.

Ile kwiatów posadziło każde z dzieci?
Zapisz obliczenia i wstaw odpowiednie znaki.

Asia: … x … = … _____ Dawid: … x … = …

Odp. ……………………………………………………………………………………………………



Dla uczenia się matematyki oznacza to, że mimo istnienia różnych kategorii metod (algorytmicznych i heurystycznych) znacznie wartościowsze dla samodzielności myślenia dzieci jest posługiwanie się heurezą, gdyż ta pobudza kreatywność ucznia i konstruowanie przez niego własnych sposobów myślenia i działania, strategii rozwiązywania zadań. W wyniku jej zastosowania obserwuje się:

- konieczność uruchamiania strategii twórczego myślenia przez uczniów,
- \konieczność posiadania zdolności do tworzenia hipotez oraz ich ciągłej weryfikacji,
- poszukiwanie niezawodnego dotąd sposobu działania,
- włączanie mniej racjonalnych czynników umysłowych, przy jednoczesnym poddawaniu ich kontroli,
- radzenie sobie z niezdefiniowaną lub słabo zdefiniowaną sytuacją matematyczną i możliwością ich przenoszenia również na zadania nieproblemowe.

Oznacza to, że posługując się strategiami heurystycznymi i rozwiązując zadania problemowe dziecko nie tylko uczy się rozwiązywania określonej kategorii zadań, lecz zdobywa wiedzę w obszarze metod i radzenia sobie z każdą niezdefiniowaną sytuacją. Z pomocą heurezy (własne poszukiwanie) może skonstruować algorytm. Niestety z pomocą algorytmu nie stworzy heurezy. Zatem odkrywanie algorytmu jest w sensie poznawczym znacznie bardziej wartościowe i całkowicie odmienne niż stosowanie algorytmu wcześniej poznanego.

Teza o konieczności wyćwiczania uczniów w algorytmach jest więc bezpodstawna. Owszem, algorytmy są potrzebne pod warunkiem, że są one przez uczniów odkrywane, a nie tylko zapamiętywane. Zatem wszystkie sytuacje monotonnego powtarzania przez uczniów ćwiczeń o charakterze standardowym, sprzyjają tylko utrwaleniu i zautomatyzowaniu umiejętności. Nie mają natomiast nic wspólnego z samodzielnością myślową dzieci i inwencją matematyczną.

Ten sposób uczenia się matematyki jest sprzężony z dominacją w podręcznikowej ofercie zadań zamkniętych i niedocenianiem roli zadań problemowych, które uruchamiają myślenie niestandardowe i twórcze, wyzwalają osobiste strategie. Z badań wynika, że nauczyciele ich nie stosują, bo:

1) nie doceniają walorów zadań problemowych i ich roli w rozwijaniu kompetencji matematycznych uczniów,
2) charakteryzują ich niskie kompetencje twórcze,
3) nie potrafią identyfikować i konstruować zadań problemowych[47].

W efekcie na zajęciach z młodszymi uczniami pojawia się stosunkowo mało zadań problemowych, co odbija się na niedostymulowaniu bardziej złożonych umiejętności matematycznych i nastawieniu na specjalizowanie się w ćwiczeniu algorytmów. Te natomiast są bardzo powszechne z uwagi na nauczycielskie przekonanie, że jeśli uczniowie będą rozwiązywali głównie zadania problemowe, to nie nauczą się szkolnych umiejętności. W ten sposób wiara w doskonalenie warsztatu i technik obliczeniowych przyczynia się do pozorowania aktywności matematycznej i upowszechniania kolejnego mitu, iż tylko algorytm jest niezawodny.

[47] D. Klus-Stańska, M. Nowicka, Sensy i bezsensy…, op.cit., s. 149.

3.4. Im dziecko szybciej dochodzi do oczekiwanego wyniku, tym edukacja jest efektywniejsza

We wczesnym nauczaniu matematyki powszechne jest również przekonanie, że powtarzanie wielu ćwiczeń i poznawanych metod z zachowaniem zasady kierowania kolejnymi krokami przez nauczyciela będzie sprzyjało podnoszeniu tempa wykonywania zadań przez dzieci. To natomiast jest postrzegane jako jedne z głównych wyznaczników efektywności nauczania.

Niestety, w uczeniu się matematyki zasada im szybciej tym lepiej, im więcej, tym lepiej nie sprawdza się, bo ilość odtwórczo wykonywanych zadań nie przekłada się na jakość ich wykonania czy wyższy poziom zrozumienia.

Przywołane stanowisko skorelowane jest z mechaniczno-asocjacyjnym podejściem do nauczania matematyki, którego negatywne aspekty ujawniają się w uruchamianiu u uczniów jedynie aktywności odtwórczo-pamięciowej, wyznaczającej naśladowczy sposób myślenia, a nie różne sposoby rozumowania. Cały wysiłek edukacyjny jest wówczas zorientowany na wynik, a nie proces uczenia się.

W szkole zorientowanej na wynik ustalony tok rozwiązywania zadań jest ćwiczony wielokrotnie, aby utrwalił się na tyle, by uczeń dysponował gotową strategią za każdym razem, gdy zetknie się z analogicznym zagadnieniem. Celem tego typu zabiegów jest zapoznanie ucznia z przebiegiem techniki obliczeniowej i utrwalenie jej w sytuacjach typowych i zręczne kierowanie ku tzw. poprawnym i szybko udzielanym odpowiedziom. Niestety nie ma w nich okazji, aby uczniowi dać czas na myślenie po swojemu. To podejście zorientowane jest natomiast na proces budowania przez ucznia jego wiedzy matematycznej, a nie jedynie jej usprawniania i pamięciowego opanowywania.

Jeżeli nauczyciel chce ustalić, czy jego nauczanie zorientowane jest na wynik, czy na proces dochodzenia do niego przez uczniów, a więc jeśli chce zrozumieć, co naprawdę robi nauczając matematyki, musi, jak proponują D. Klus-Stańska i M. Nowicka, odpowiedzieć sobie na podstawowe pytanie. „Mianowicie, na co poświęca w klasie więcej czasu: na samodzielne, niekierowane próby odkrycia (wymyślenia) przez uczniów własnych metod poradzenia sobie z nieznaną im dotychczas trudnością (uruchamianie procesów), czy na ćwiczenie i na powtarzanie poznanych metod z zachowaniem zasady kierowania kolejnymi krokami przez nauczyciela i natychmiastową korektą błędnych posunięć (utrwalanie wyniku)”[48]. Jako ilustrację przytaczam przykłady zadań tekstowych. Pierwsze zorientowane są na wynik, gdyż jedynie szlifują ustalony tok rozwiązania zadania i powtarzanie poznanej metody. Wprawdzie mają one odmienny charakter. Jedno z nich jest zadaniem prostym, drugie złożonym, lecz w obu przypadkach każde jest nieproblemowe i wymaga jedynie posłużenia się określonym algorytmem. Prowadzi do z góry zaplanowanego wyniku i jego osiągnięcie jest głównym wyznacznikiem poprawności wykonania zadania.

Przykład 1

Na parkingu stało 15 samochodów. Po pewnym czasie 7 odjechało. Ile samochodów pozostało na parkingu?

[48] D. Klus-Stańska, M .Nowicka, Sensy i bezsensy …, op. cit., s. 111.

Romek czytał przez kilka dni książkę. W poniedziałek przeczytał 42 strony. We wtorek o 14 stron więcej. W środę przeczytał o połowę mniej niż przez dwa pierwsze dni razem. W czwartek udało mu się przeczytać o 12 stron więcej niż w środę. Na piątek zostało mu 28 stron do końca książki. Ile stron miała książka?

Drugi przykład zadania prowokuje do myślenia. Jest zorientowane na proces. Zadanie ma strukturę wieloetapową, bez gotowych odpowiedzi, lecz z nastawieniem na ich poszukiwanie. Jest problemem, którego rozwiązanie uczeń musi odkryć w procesie własnej aktywności, konstruowania rozwiązania.

Przykład 2[49]

[49] Zadanie zaczerpnięte z podręcznika Przygoda z klasą 2. Książka ucznia 2, WSiP, Warszawa 2003, s. 54.

Wartość powyższego zadania jest nieporównywalnie większa niż wielokrotne wykonywanie zadań typowych, ubranych za każdym razem w inną sytuację życiową. Nie ma bowiem znaczenia czy będzie to zadanie o kupowaniu ciasteczek czy sprzedawaniu kwiatków, jeśli narzucona metoda jego wykonania jest zawsze taka sama. W tym wypadku uczeń ma możliwość poszukiwania własnych strategii działania.

3.5. Tylko nieliczni uczniowie są uzdolnieni matematycznie

Z badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej[50] wynika, że ponad połowa przedszkolaków wykazuje matematyczne zdolności, a już w klasie pierwszej aż 25% dzieci ma problemy z matematyką. Czy na tej podstawie można przyjąć tezę, że tylko nieliczni uczniowie są uzdolnieni matematycznie? Czy może lepiej zadać sobie pytanie, co sprawia, że liczba uzdolnionych matematycznie dzieci tak drastycznie zmniejsza się w szkole?

„Większość problemów szkolnych pojawia się tuż po rozpoczęciu nauki"[51] – odpowiada w wywiadzie E. Gruszczyk-Kolczyńska. Tak jest również w edukacji matematycznej. Dotyczy to co czwartego dziecka. Oznacza to, że problem nie tkwi w nielicznych dzieciach uzdolnionych matematycznie, lecz w tym, że licznie uzdolnione matematycznie dzieci pozbawiane są tego przez system szkolny. Z odważnych, krytycznych i twórczych przedszkolaków po kilku tygodniach szkolnej edukacji stają się mentalnie usidlone mało kreatywnymi zadaniami, zniechęcone do nauki, nastawione na odtwarzanie schematów myślowych. Towarzyszące im okoliczności edukacyjne bardzo skutecznie przyczyniają się do blokowania wszelkiej aktywności, której można byłoby nadać status poznawczej. Bierność postrzegania faktów, mechaniczne przyswajanie różnych wiadomości, pamięciowe uczenie się wypierają skutecznie naturalny u dzieci pęd do poszukiwań i eksploracji, myślnie projektujące, zdolność do analizy, samodzielnego planowania, itd. W miejsce tego proponuje się dzieciom zunifikowany system nauczania, kiedy nie uwzględniając indywidualnych różnic, wszyscy uczniowie uczą się tego samego, w tym samym tempie i w ten sam sposób. Wystarczy przyjrzeć się kartom pracy z zadaniami matematycznymi, aby zauważyć, jak skraca się w nich proces rozwiązania zadań do uzupełniania luk zamiast samodzielnej pracy i posługiwania się liczmanami.

Przykładowa karta pracy z podręcznika

1. Oblicz. Dodawaj najpierw złote, a potem grosze według wzoru.
25 zł 50 gr + 16 zł 30 gr = (25 zł + 10 zł + 6 zł) + (50 gr + 30 gr) = ___ zł ___ gr
5 zł 20 gr + 7 zł 30 gr = _____ zł _____ gr
17 zł 15 gr + 9 zł 40 gr = _____ zł _____ gr
33 zł 25 gr + 15 zł 30 gr = _____ zł _____ gr

2. Oblicz. Odejmij najpierw złote, a potem grosze według wzoru.
38 zł 96 gr – 12 zł 45 gr = (38 zł – 12 zł) + (96 gr – 45 gr) = ___ zł ___ gr
45 zł 70 gr – 9 zł 20 gr = ___ zł ___ gr
38 zł 85 gr – 4 zł 23 gr = ___zł ___ gr
76 zł 68 gr – 22 zł 23 gr = ___ zł ___ gr

[50] E. Gruszczyk-Kolczyńska, Szkoła, rzeź talentów, „Dziennik Gazeta Prawna", 10-12 maja 2013 r.
[51] Ibidem.

Mimo że z badań psychologów wynika, iż różnice rozwojowe w sferze umysłowej wynoszą u dzieci 4 lata, co oznacza, że dziecko 7-letnie może być na poziomie rozwoju intelektualnego 5- lub 9-latka, szkoła tego nie uwzględnia. Wszyscy uczniowie muszą bezwzględnie podporządkować się gotowej ofercie metodycznej, która niestety nie uwzględnia zadań zróżnicowanych ze względu na stopień trudności i możliwość ich rozwiązania z uwzględnieniem różnych reprezentacji wiedzy: od enaktywnej przez ikoniczną do symbolicznej. Dzieci zmuszane są więc do naśladowania innych, bezmyślnego powtarzania za nimi czynności, których sensu matematycznego nie rozumieją. W tzw. nauczaniu zbiorowym ginie indywidualny uczeń. Na lekcji może odpisać od innych, a w domu skorzysta z pomocy rodziców. W ten sposób nauczyciel nie widzi żadnego problemu i nie podejmuje żadnych kroków, aby pomóc uczniowi wyrównać narastające opóźnienia edukacyjne.

Neutralizowaniu zdolności matematycznych sprzyja również monotonny kanon nauczania. Niejeden przedszkolak, gdy przychodzi do szkoły liczy do 1000, matematyzuje to, co go otacza ciągle coś przeliczając, opisując liczbami, klasyfikując według przyjętych przez siebie kryteriów. Tymczasem będąc już uczniem każe mu się poznawać przez 20 minut liczbę 1, a potem w odstępie około tygodnia liczbę 2 i tak do 10. Warto również przyjrzeć się, kiedy ten moment pojawia się w ministerialnym podręczniku „Nasz elementarz". Ma to miejsce dopiero około strony 40. Czy to przypadek? Czy też przejaw niedowierzania w kompetencje dzieci i ich aktywność?

W tle tego typu rozwiązań kryje się nastawienie na realizację programu dla średnich uczniów. Już w klasie pierwszej dzieci wiedzą, że nie trzeba się spieszyć (choć nauczyciel ich pogania), bo wtedy się nudzą. Nie trzeba poszukiwać metod rozwiązania zadania, bo te są zawsze dokładnie rozpisane w każdym oferowanym przez podręcznik i ćwiczenia zadaniu. Nie trzeba nawet czytać niektórych zadań, bo wszystko da się w nich odgadnąć z ilustracji. Nie trzeba myśleć, bo ktoś już za nich pomyślał, co należy wykonać. Problem jest więc nie w braku uzdolnionych matematycznie dzieci, lecz w tym jak system szkolny zabija w dzieciach te naturalne dla nich kompetencje do liczenia.

W książce „Naucz małe dziecko myśleć i uczyć się"[52] możemy przeczytać następujące zdanie: nie ma dzieci matematycznie głupich. Są jedynie dzieci, których talent matematyczny nie został rozwinięty lub którym dobrano źle czas i materiał do nauki. Refleksja jest gorzka, ale bardzo prawdziwa.

[52] Naucz małe dziecko myśleć i uczyć się, Wydawnictwo Ravi, Łódź 2004.

4. Wspieranie aktywności matematycznej dzieci – rozwiązania praktyczne

Potrzeba zmiany podejścia do szkolnej nauki matematyki jest konieczna. Wymaga mentalnego oswojenia wiedzy programowej przez rozluźnienie stosowanych w początkowym nauczaniu matematyki formalnych obostrzeń, takich jak:

1) formalizacja języka,
2) unifikacja tematyczna zadań na lekcji,
3) unifikacja poziomu trudności zadań,
4) narzucanie metody rozwiązania[53].

Pierwsze z obostrzeń dotyczy rezygnacji z sytuacji edukacyjnych, kiedy uczniowi nakazuje się posługiwać podręcznikową terminologią bez jej zrozumienia i bez używania języka potocznego. Znacznie pożyteczniejszym jest dla ucznia posługiwanie się jego osobistym językiem pełnym kolokwializmów i niedoskonałości, ale zrozumiałym dla niego. Fachowość języka przyjdzie bowiem z czasem i będzie efektem naturalnej aktywności dziecka. Zatem zamiast formuły „odpowiadaj całym zdaniem" lub podaj definicję, tak jak brzmi ona w podręczniku pozwólmy mówić dziecku tak jak potrafi, ale w sposób dla niego zrozumiały.

Pozostałe trzy warunki dotyczą oferty zadaniowej i metod pracy. Zdecydowanie konieczne jest w tym obszarze zastąpienie standardowych zadań zamkniętych o jednym rozwiązaniu zadaniami problemowymi, które nie tylko prowokują do własnej aktywności myślowej, ale również ich forma wskazuje na różne stopnie trudności i warianty ich analizowania. Szerzej zagadnie to omówię w dalszej części książki, gdyż podejście problemowe, uczyniłam wiodącym w poszukiwaniu rozwiązań wspierających aktywność matematyczną dzieci.

4.1. Kształtowanie pojęć

Spojrzenie na rozwijanie umiejętności matematycznych przez pryzmat filozofii konstruktywizmu, pokazuje niektóre zagadnienia matematyczne w nieco innym świetle, niż jesteśmy do tego przyzwyczajeni. Pojęcia matematyczne nie są wówczas kształtowane przez pryzmat ściśle określonych definicji, niepodlegających osobistym interpretacjom, lecz w kontekście bogatych doświadczeń szkolnych i pozaszkolnych dziecka, składających się na rodzaj biografii poznawczej dziecka oraz w toku jego osobistej aktywności podejmowanej podczas rozwiązywania zadań.

Proces kształtowania pojęć ma więc charakter indukcyjny. Składa się na niego kilka faz, z których najistotniejsze to:

1) kontekst bogatych doświadczeń dziecka,
2) konstruowanie pojęcia wyrastające z indywidualnego badania problemów.

[53] D. Klus-Stańska, M. Nowicka, Sensy i bezsensy…, op.cit., s. 133.

Pierwsza faza wskazuje na procesualne tworzenie się pojęć matematycznych, kiedy wykorzystuje się dotychczasowe doświadczenia dziecka w powiązaniu z tymi nowo zdobywanymi i nowymi wyjaśnieniami (np. pochodzącymi od nauczyciela) lub od ucznia oswajanymi za pomocą języka potocznego. Pomijanie tego procesu nie tylko utrudnia rozumienie pojęć naukowych, ale uczy również, że nie można ich wyjaśniać w dostatecznie prosty sposób bez odwoływania się do potocznego języka dziecka, jak i bez uwzględniania kontekstu wyjściowego, jakim jest dziecięcy zasób doświadczeń. Ten proceduralny fundament jest niezbędny, aby wiedza dziecka była produktywna, twórcza, narastała od środka, czyli od wcześniejszych genetycznie struktur i w harmonii z nimi.

Kształtując pojęcia matematyczne trzeba więc zawsze wychodzić od sytuacji edukacyjnych, w których dziecko może odwołać się do dotychczasowych struktur poznawczych i zdobyć nowe doświadczenia, którymi je uzupełni. Na przykład zamiast definiowania przez nauczyciela określonego pojęcia matematycznego proponuje się sytuację do jego badania.

Obok przykład zaczerpnięty z książki Poznaję świat matematyki[54] jest tego ilustracją. Zamiast nauczycielskiego wytłumaczenia, jakie są miary pojemności/masy, dziecko jest stawiane w sytuacji aktywności badawczej, którą stymulują realnie istniejące przedmioty (opakowania produktów) i pytanie: Które z tych produktów kupuje się według wagi, a które według objętości? Odpowiedzi na nie poszukuje dziecko obserwując, analizując, stawiając hipotezy, itd.

Dzięki temu dziecko ma możliwość konstruowania pojęcia w drodze aktywności. Definicja natomiast nie jest punktem wyjścia, lecz efektem dziecięcego działania.

Aby ustrzec się przed werbalnym przekazem nauczyciela, który rzadko trafia na procesualny fundament (własna aktywność dziecka) konstruowanie problemu powinno wyrastać z indywidualnego badania. Do zadań nauczyciela należy więc stwarzanie takich problemowych sytuacji, które ten rodzaj samodzielnej aktywności ucznia uruchomią. Poniżej przedstawiam kilka ich przykładów:

1. Podczas przygotowywania sałatek z warzyw i owoców kroją je i rozdzielają. Jest to doskonała okazja, aby w sposób naturalny dzieci mogły posługiwać się pojęciami: pół, ćwierć, 1/3 itd.
2. Podczas zajęć z kultury fizycznej i wykonywania ćwiczeń skocznych możliwe jest posługiwanie się różnymi przyrządami pomiarowymi. Dzięki temu można zainteresować dzieci umiejętnością mierzenia, sprawnego posługiwania się jednostkami miary, porównywania uzyskanych wyników.

Jeżeli nie uwzględni się takiej kolejności organizowania zajęć (od doświadczenia do pojęcia) prowadzi to do tzw. użytkowej dezintegracji pojęć matematycznych[55]. Przejawia się on w matematycznej bezradności. Pojęcia matematyczne ograniczane przez kontekst tradycyjnej lekcji w toku podającym usztywniają się i nie mogą być wykorzystywane w odmiennych sytuacjach pozaszkolnych. Dziecko nie dostrzega ich użyteczności poza lekcją w klasie. Dzieje się tak, gdy program nauczania jest obok dziecięcych doświadczeń lub w oderwaniu od ich wiedzy potocznej. Na przykład posługiwanie się obliczeniami zegarowymi w szkole jest bardziej uciążliwe, bo kojarzy się jedynie z podręcznikowymi

[54] D. i W. Clemnson, Poznaję świat matematyki, tłum. M. Lipowska, Świat książki, Warszawa 1997, s. 32.
[55] A. Kalinowska, Poznawczy i kulturowy wymiar dezintegracji …, op.cit., s. 384.

zadaniami z tarczą zegarową. Natomiast w sytuacjach życia codziennego posługiwanie się zegarem jest zupełnie niezauważalne i bezproblemowe. Tak jest z wieloma pojęciami matematycznymi, których kształtowanie szkoła usztywnia (obliczenia pieniężne, wykonywanie działań dodawania i odejmowania, tabliczka mnożenia, klasyfikowanie przedmiotów, itd.). Jak pisze A. Kalinowska „usztywnione definicyjnie znaczenia nie poddają się rekonstrukcji, ponieważ uczeń opanowuje je przede wszystkim w postaci pamięciowo zachowanych schematów nie podlegających refleksji. Kolejny, wyższy poziom uogólnienia danego pojęcia jest zapisany w jego umyśle, jako zupełnie odrębne tematycznie zagadnienie. Wiedza matematyczna stanowi wówczas linearny zestaw niepowiązanych ze sobą pojęć, których należy użyć, gdy na lekcji padnie hasło tematyczne, na przykład: „Mnożenie w zakresie 30”[56].

Kształtowaniu pojęć matematycznych w świetle konstruktywistycznej teorii uczenia się powinno towarzyszyć więc odwoływanie się do wiedzy osobistej ucznia i jego doświadczeń oraz pobudzanie jego aktywności przez sytuacje problemowe, bo te będą powodowały, że wiedza matematyczna dzieci nie będzie wysepkami w umyśle, w których zakotwiczone są wyłącznie niezrozumiałe wzory czy schematy obliczeniowe.

4.2. Konstruowanie sytuacji problemowych

Zgodnie z filozofią konstruktywizmu, uczenie się jest poszukiwaniem znaczeń, dlatego powinno się rozpoczynać od rozwiązywania problemów. To najlepszy sposób, aby spowodować aktywne uczestnictwo dziecka w rozwiązaniu zadania i pomóc mu w świadomym i ze zrozumieniem uczeniu się.

Sytuacja problemowa powinna być sytuacją badawczą, w której nauczyciel zastępuje udzielanie informacji organizowaniem uczniowi własnego odkrywczego działania, stwarza sytuacje sprzyjające myśleniu, łączeniu osobistego doświadczenia z nowymi treściami, daje okazję do rozwiązań praktycznych i do zdobywania kolejnych nowych doświadczeń. Do głównych cech takiej sytuacji należy: nowość zagadnienia, nastawienie na zmianę, czasem dziwność, niezgodność z dotychczasowym doświadczeniem, złożoność, wieloznaczność, niewyraźność, luki w dostępnych informacjach, jednym słowem – konflikt poznawczy.

Organizowanie sytuacji problemowych nie jest jednak sprawą łatwą. Chodzi bowiem o to, aby stworzona sytuacja edukacyjna wywołała niepokój poznawczy ucznia i umożliwiała mu samodzielne dostrzeżenie, sformułowanie i rozwiązanie postawionego problemu. Pamiętać należy, że problem to rodzaj zadania dla dziecka nowego, dotychczas nie spotykanego, trudnego, do rozwiązania, którego nie wystarcza mu jego dotychczasowa wiedza. Podejście do problemu jest więc subiektywne. To samo zadanie dla jednego ucznia może być problemem z uwagi na brak doświadczeń i wiedzy niezbędnej do jego rozwiązania. W innym przypadku może okazać się zwykłym zadaniem utrwalającym, w który uczeń zastosuje odkrytą już wcześniej strategię jego rozwiązania. Ważną sprawą jest więc rozeznanie pokładów wiedzy osobistej dzieci i tworzenie takich sytuacji, które przebiegałyby w warunkach w pełni zaakceptowanych przez dzieci, prowokujących je do myślenia krytycznego i twórczego, uruchamiania aktywności umysłowej.

Najlepiej, gdy sytuacje problemowe przyjmują jak najbardziej naturalną postać, tj. tworzone są przez same dzieci, zgodnie z ich zainteresowaniami, potrzebami, stawianymi pytaniami. Sprzyjają temu sytuacje obserwacji, działań praktycznych, gry i zabawy dziecięce oraz wszelkie czynności wzięte z sytuacji życia codziennego. M. Dąbrowski nazywa to „łapaniem matematycznych okazji”[57]. Kilka ich przykładów zamieszczam poniżej.

[56] Ibidem, s. 383.

[57] M. Dąbrowski, O rozwijaniu umiejętności matematycznych…, op.cit., s. 59.

Przykład 1

W trakcie zajęć w klasie I (październik) pojawiła się potrzeba przygotowania kopert. Do wyboru był papier formatu A4 w czterech kolorach, więc i wśród dzieci pojawiły się koperty w czterech kolorach: żółtym, niebieskim, czerwonym, zielonym. Gdy gotowe koperty zebrano w jednym miejscu ktoś zauważył, że chyba najmniej jest żółtych. Uruchomiło to serię pytań i działań z nimi związanych:

- Jak możemy się upewnić, czy żółtych jest rzeczywiście najmniej?
- A ile jest niebieskich czy zielonych? O ile więcej?
- A ile jest razem zielonych i żółtych?

Jedno z końcowych pytań dotyczyło porównania liczby dzieci obecnych na sali z liczbą wszystkich kopert. Jeden z uczniów odpowiedział na nie w następujący sposób: Każdy z nas zrobił jedną kopertę, a więc było tyle samo kopert, co nas, ale przed chwilą Marysia wyszła, więc teraz jest nas o jedno mniej niż kopert[58].

Przykład 2

Z uwagi na Dzień Dziecka nauczycielka przyniosła do klasy torbę pełną cukierków: owocowych, czekoladowych, karmelków oraz małych wielosmakowych wafelków. Dzieci radośnie zareagowały na niespodziankę. Problem pojawił się podczas częstowania, bo okazało się, że dostają smaki, których nie koniecznie lubią. Padła propozycja: Posegregujmy słodycze! W trakcie czynność dzieci rozdzielały słodycze w grupach i zadawały pytania:

- Jakie macie cukierki?
- Ile jest cukierków czekoladowych/mlecznych/owocowych?
- Czego jest więcej: wafelków czy cukierków?
- Jak możemy podzielić sprawiedliwie słodycze, aby każdy był zadowolony?
- Co zrobić z pozostałymi cukierkami?
- Ile ich zostało?
- Ile razem było wszystkich słodyczy?
- A może lepiej byłoby je na początku zważyć?
- Jak się je waży? itd.

Od przeliczania i segregowania cukierków, szukania różnych sposobów ich klasyfikowania oraz sprawiedliwego rozdzielenia dzieci przeszły do posługiwania się umiejętnościami praktycznymi w zakresie wagi i posługiwania się jednostkami masy.

Projektowanie sytuacji edukacyjnych z wykorzystaniem nauczania problemowego to również konieczność uwzględniania możliwości wyboru. Mogą one dotyczyć: sposobu wykonania zadania, założonych rezultatów, technik działania, czasu trwania, osób, z którymi zamierza się kooperować, doboru przedmiotów i narzędzi, form ekspresji, a więc tego wszystkiego, co ma pobudzić naturalną ciekawość, wzmocnić motywację i utrzymać aktywność dziecka. To natomiast wzmacnia ilość samodzielnych działań, zaangażowanie ucznia i satysfakcję podczas lekcji.

58 Ibidem, s. 59.

4.3. Formułowanie zadań

Zadanie w literaturze określa się jako środek kierowania aktywnością ucznia, narzędzie wywoływania określonych zmian. Diametralnie zmienia się jednak jego sens, gdy zaczniemy jej rozumieć jako rodzaj sytuacji prowokującej ucznia do myślenia i działania, konstruowania i rekonstruowania wiedzy czy porządkowana lub utrwalania zebranych informacji.

W literaturze wymienia się zadania otwarte i zamknięte. Ich skrótową charakterystykę zawiera tabela 1. Ma ona charakter dychotomiczny, nie z powodu uproszczenia tej analizy, ale dla wyostrzenia różnic pomiędzy wymienionymi kategoriami zadań.

Szczególnie wartościowe dla uczniów są zadania otwarte, tzw. problemy, z którymi zdaniem E. Nęcki mamy do czynienia, gdy „człowiek zmierza do jakiegoś celu, lepiej lub gorzej sformułowanego, ale nie wie, w jaki sposób przekształcić stan wyjściowy w pożądany stan końcowy”[59].

Tabela 1. Porównanie zadań otwartych i zamkniętych

Zadania otwarte	Zadania zamknięte
Zadania o wielu rozwiązaniach i wielu strategiach dochodzenia do wyniku	Zadania o jednym rozwiązaniu wynikającym z narzuconego konstrukcyjnie sposobu wykonania
Oparte na heurezie	Oparte na algorytmie
Prowokują płynność i giętkość intelektualną	Bazują na pamięciowym uczeniu się
Umożliwiają wychodzenie poza dostarczone informacje – konstruowanie i rekonstruowania wiedzy	Wymagają zastosowania podanych informacji, bez możliwości ich modyfikowania
Nastawione na projektowanie, wymyślanie, refleksję, interpretację – myślenie produktywne i krytyczne	Nastawione na utrwalanie umiejętności, przypominanie wiadomości, porządkowanie treści
Prowadzą do wiedzy samodzielnie zdobytej, trwałej, dynamicznej	Powodują wiedzę odtwórczą, naśladowczą, statyczną, nie poddającą się zmianom

Źródło: opracowanie własne

Konstytutywną cechą problemu jest więc konieczność wymyślenia (a nie przypomnienia, na co zdają się nie zważać nauczyciele) przez jednostkę skutecznych sposobów osiągania celu. Poniżej przedstawiam różne przykłady zadań problemowych zaczerpnięte z podręczników, zeszytów ćwiczeń oraz ciekawych rozwiązań metodycznych u podstaw, których leżą założenia konstruktywizmu.

Przykład 1

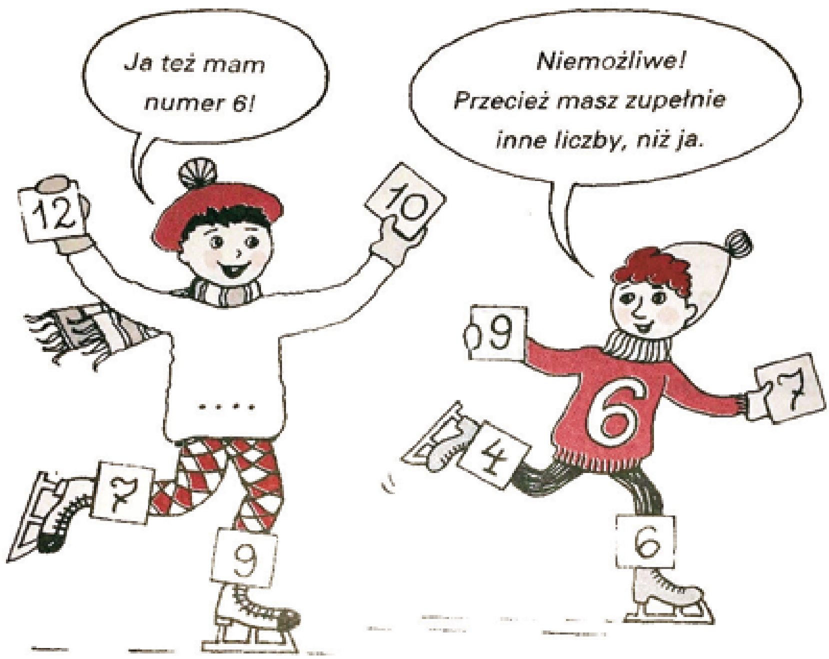
Janek dostał od babci pieniądze na czasopisma przyrodnicze.
Gdy zdecyduje się kupić 5 numerów, zostanie mu 10 złotych.
Gdyby chciał kupić 7 numerów zabraknie mu 6 złotych.
Ile pieniędzy Janek dostał od babci?
Ile kosztuje jedno czasopismo?

[59] E. Nęcka, TroP, Twórcze rozwiązywanie problemów, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 1994, s. 28.

Przykład 2[60]

1 OBLICZ NUMER ZAWODNIKA

Możesz obliczać numery następnych łyżwiarzy.
Na przykład:
Do łyżwiarza $\boxed{6}$ podbiegł inny łyżwiarz i mówi:



Sprawdź.
Wykonaj na moich liczbach te same działania co poprzednio, a przekonasz się.

Sposób I ( ) = ...

Sposób II ( ) = ...

Sposób III ( ) = ...

Tak, ty też masz numer ....

60 Przykład zaczerpnięty ze zbioru zadań J. Hanisz, Zadania na szóstkę, WSiP, Warszawa 1999.

Załączone przykłady zadań otwartych mają interesującą dla ucznia postać. W miejsce monotonii uzupełniania luk i oczywistych rozwiązań, stawiają przed uczniem problem. Są swego rodzaju zagadką, którą w drodze osobistego wysiłku umysłowego musi rozwiązać. Dodatkowo cechuje je wiele dróg dochodzenia do wyniku, co sprzyja stymulowaniu płynności i giętkości myślenia oraz zrozumienia. Matematyka staje się wówczas ciekawą przygodą, a nie męczącym i nudnym obowiązkiem wykonywania identycznych zadań o charakterze utrwalającym czy sprawdzającym wiedzę ucznia.

5. Propozycje podręcznikowe Nasza szkoła. Matematyka – analiza przykładów

Podręcznik Nasza szkoła. Matematyka zawiera treści uporządkowane w kilka działów tematycznych. Są to:

1) Wiadomości i umiejętności praktyczne, ilustrowane tematami:
   - Jak odczytujemy plany?
   - Jak ustalamy położenie?
   - Jak zapisujemy daty?
   - Która godzina?
   - Jaka jest temperatura? itp.
2) Działania na liczbach, jak:
   - W jakiej kolejności dodajemy?
   - Co to jest suma?
   - Co to jest różnica?
   - Jak odejmujemy?
   - Co to jest mnożenie?
   - Liczymy dziesiątkami, czyli jak?
3) Figury geometryczne:
   - Jakie figury nie mają boków?
   - Gra podwórkowa,
   - Powtórki przez pagórki, itp.

Przywołane tematy, a szczególnie ich realizację, można postrzegać, jako organizowanie aktywności uczniów z wykorzystaniem **metody indukcji i dedukcji**. Pierwsza z metod polega na organizowaniu aktywności uczniów od nagromadzenia materiału konkretnego (realnie istniejące przedmioty, liczmany, elementy do manipulowania), przez jego obserwację, analizę do wyprowadzenia wniosków, uogólnień, reguł. Przykładami mogą być tematy:

- Liczby, plany, czas,
- Tyle samo? Więcej? Mniej?
- Jak odczytujemy plany?
- Która godzina?
- Jaka jest temperatura?
- Co to jest mnożenie? Itd.

Konstruowane są one według zasady: „obrazek i nowe wiadomości". Wykorzystana w nich ilustracja nie ma jednoznacznego zastosowania. Są sytuacje, kiedy obrazek nie zawiera żadnych pytań i może prowokować uczniów i nauczyciela do własnej aktywności. Tak jest w tematach: Liczby, plany, czas; Mnożenie i inne. Wówczas ilustracja ma charakter otwierający myślenie, prowokujące uczniów do zadawania własnych pytań i szukania na nie odpowiedzi, jak np. przy treściach dotyczących planu miasta[61], pytania mogą dotyczyć ilości zebr, ich rozmieszczenia, kierunku poruszania, rozmieszczenia domków, kolejności

[61] Nasza szkoła. Matematyka. Podręcznik do szkoły podstawowej. Klasa 2, część 1, Ministerstwo Edukacji Narodowej, Warszawa 2014, s. 4.

ich występowania itd. Prowokować do tego mogą pytania: Co powiecie o zebrach? Co powiecie o domkach? O co możemy zapytać? Zamiast prostych pytań: Ile jest zebr? Ile jest domków?

W przygotowanym zestawie są również sytuacje zawierające już gotowe pytania. Jest ich znacznie więcej (tematy: Jak ustalamy położenie? Jak ustalamy daty? Która godzina? Po południu, czyli o której? itd.). Wówczas należy ocenić wartość pytań i rozstrzygnąć, które z nich dotyczą tylko faktów, a które mają postać problemów. Te ostatnie są szczególnie ważne, bo uruchamiają samodzielne strategie poszukiwania rozwiązań i pomagają w uczeniu się ze zrozumieniem. Dla porównania podaję przykłady:

1) Przeczytajcie, jakie ulice są zaznaczone na planie. Jest poleceniem zorientowanym na fakty – odszukanie informacji wynikających z planu.
2) Celina mieszka przy ul. Kolejowej, niedaleko biblioteki. Jakimi ulicami może dojść do szkoły? Odpowiedź na to pytanie może być przez dziecko dowolnie skonstruowana, poszukując różnych alternatywnych wersji dojścia do tego samego miejsca. Może sprowokować do poszukiwania drogi krótszej i dłuższej, łatwiejszej i trudniejszej.

Po aktywności związanej z sytuacjami wprowadzającymi, które pozwalają rozeznać się w zasobie doświadczeń dzieci, jak również wzbogacić je o nowe pojawiają się zadania o różnym stopniu trudności, które utrwalają poznane treści lub wprowadzają nowe z zastosowaniem struktury problemowej.

Drugą metodą wykorzystaną w podręczniku jest dedukcja. Przebiega ona od ogółu do szczegółu, od podania definicji, reguły do poszukiwania jej zastosowania w zróżnicowanych pod względem stopnia trudności sytuacjach. Obejmuje ona wówczas etapy:

1) Zdefiniowanie pojęcia.
2) Zilustrowanie go przykładami.
3) Zastosowanie w sytuacjach typowych.
4) Zastosowanie w sytuacjach nietypowych.

Poszczególnym fazom tej metody przypisane są określone rodzaje zadań. W temacie Co to jest suma? Co to jest różnica? na początku uczeń poinformowany jest o tym, co to jest suma, co to jest różnica. Następnie podane są przykłady ilustrujące ten rodzaj działań, po czym pojawia się kilka zadań utrwalających typu: zapisz działania, w których suma jest równa 15 lub wykonaj podane działania, po czym pojawiają się dopiero zadania stawiające dzieci w sytuacjach nietypowych, wymagających od nich poszukiwania rozwiązania „na własny sposób". Na przykład:

> Ola i Maja sprawdzają, ile pieniędzy zaoszczędziły. Mówi jedna: w sumie mamy 20 zł.
> Mówi druga: nasze oszczędności różnią się o złotówkę. Porozmawiajcie o tym, kto ma rację.

Powyższych zadań przy każdym temacie jest kilka. Dzieci mają więc okazję do uruchamiania różnych strategii myślowych i posługiwania się odmiennymi reprezentacjami wiedzy od enaktywnej, przez ikoniczną do symbolicznej. Każde zadanie ma nieco inną sytuację życiową, co pozwala uchronić dzieci od nudy i monotonii. Pozwala również dostrzegać matematykę w znacznie większej ilości obszarów życia codziennego niż tylko robienie zakupów.

Zgodnie z konstruktywistyczną filozofią edukacji podręcznik nie jest traktowany, jako główne i niezastąpione źródło wiedzy, lecz jako jedno z wielu, które ma pomóc dziecku w przeprowadzeniu go od zmysłowego odbioru świata do konstruowania i opisywania go za pomocą symboli. W tym też sensie postrzegam korzystanie z podręcznika Nasza szkoła. Matematyka, gdzie zaproponowane rozwiązania mogą służyć jako pomoc, nie zaś zestaw zadań do obligatoryjnego zastosowania. Mogą one, a wręcz powinny być modyfikowane w zależności od potrzeb i możliwości dzieci, kierując się zasadą zaufania do ich kompetencji wiedzotwórczych i twórczego potencjału tkwiącego w każdym dziecku.

5.1. Działania na liczbach

Ta część podręcznika zawiera treści dotyczące dodawania, odejmowania i mnożenia. Ujęte są one zarówno z zastosowaniem metody indukcji, jak i dedukcji. Poniżej przedstawiam kilka przykładów z możliwościami ich modyfikowania.

Przykład 1

Pytanie do zadania brzmiało: Kto ma najwięcej przedmiotów? Kto ma najmniej?

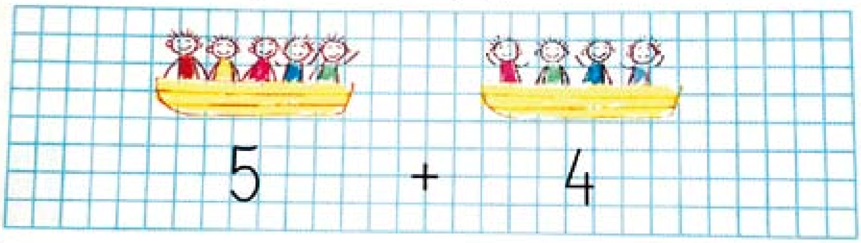
- Kto mógł tak powiedzieć?
  - Mam najwięcej flamastrów.
  - Mam tyle samo flamastrów, ile razem ołówków i gumek.
  - Mam o 3 flamastry więcej niż gumek.
  - Jeśli dostanę jeszcze 2 ołówki, to będę mieć ich tyle samo, ile gumek.

Zadanie zawiera ilustracje i postawione do nich pytania. Można skorzystać z nich lub zaproponować, aby dzieci formułowały jeszcze inne pytania i poszukały do nich odpowiedzi. Sytuacja jest więc otwarta i może prowokować kolejne poszukiwania. Istotne jest, aby pobudzała dzieci do analizy, syntezy, porównywania, czyli posługiwania się różnymi strategiami myślenia ułatwiającymi im zrozumienie kształtowanego pojęcia. Zaproponowane w podręczniku zadanie może więc mieć różne wersje realizacji w zależności od aktywności uczniów, ich doświadczeń i zasobów wiedzy osobistej, na co nauczyciel powinien reagować.

Przykład 2

5. Do dwóch łódek wsiadło 9 osób. Ile osób może płynąć w każdej łódce?

Patryk wykonał taki rysunek i rozwiązuje zadanie.



- Narysujcie inne rozwiązania tego zadania.

Powyższe zadanie również ma postać aktywizującą. Można byłoby poprzestać na zaproponowanym rozwiązaniu, ale tak nie jest. Pojawia się pytanie o kolejne możliwe rozwiązania, w poszukiwaniu, których uczestniczą uczniowie. Zanim dojdzie więc do zapisania działania w postaci formuły matematycznej, jest okazja do posługiwania się przez uczniów reprezentacją ikoniczną (czy w wybranych przypadkach enaktywną) i wyłaniania własnych rozwiązań, które nie muszą od razu mieć postaci słupków matematycznych, choć mogą być jakąś ich wersją, jeśli któryś z uczniów taką propozycję poda.

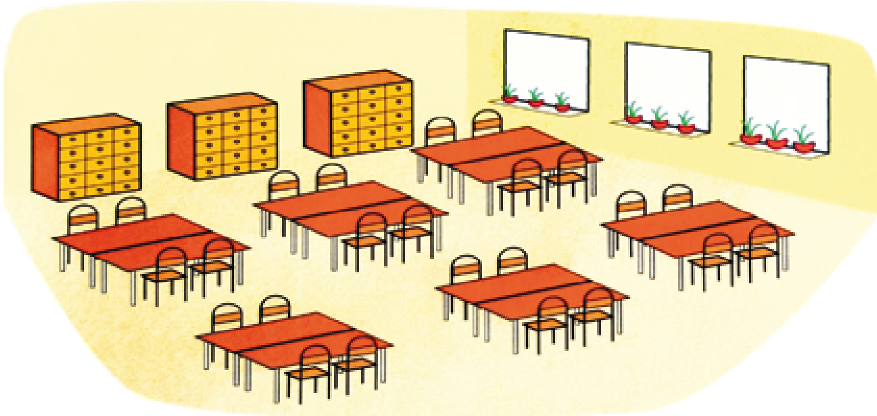
Przykład 3

Karol zebrał o 3 kasztany więcej niż liści. Kasztanów zebrał mniej niż 10.
Czy liczba kasztanów i liści razem może być większa niż 20?

Przytoczony przykład jest klasycznym zadaniem problemowym. Dziecko stawiane jest w sytuacji znalezienia rozwiązania, osiągnięcia celu w postaci udzielenia odpowiedzi na pytanie. Nie jest to jednak sytuacja prosta, jednoznaczna. Brakuje bowiem pewnych elementów, aby zadanie rozwiązać. Konieczne jest przekształcenie sytuacji wyjściowej w pożądany stan końcowy, a to wymaga dodatkowych operacji myślowych, aktywności badawczej i poszukiwawczej. Co więcej, zadanie może mieć wiele wariantów rozwiązania. Jednym z nich może być metoda prób i błędów, kiedy uczeń przypadkowo określa liczbę liści i kasztanów, aby po wielu próbach odkryć panującą w zadaniu zależność. Jest to metoda długotrwała i pracochłonna oraz wymagająca wytrwałości. Drugi wariant, to dostrzeżenie zależności między liczbą kasztanów i liści i odkrycie, że mniej niż 10 oznacza 9, 8, 7 itd. kasztanów, co pozwala doprecyzować ilość liści. Ważne jest jednak, aby w tych poszukiwaniach uczestniczyły dzieci i im udało się rozstrzygnąć problem, a nie zostać obdarowanym jego rozwiązaniem przez podręcznik czy podpowiadającego nauczyciela.

Przykład 4

1. To sala lekcyjna Agaty z klasy 4b. Pani ustawiła po 2 stoliki razem, bo dzieci mają pracować w zespołach. Przyjrzyjcie się ilustracji i powiedzcie, co się znajduje w sali lekcyjnej.



- Ile stolików jest w klasie Agaty?
  $2+2+2+2+2+2=$?
- W sali lekcyjnej na każdym parapecie są ustawione doniczki. Policzcie, ile jest razem doniczek.

Przykład zadania zaczerpnięty jest z rozdziału zatytułowanego: Co to jest mnożenie? Jego realizacja ma charakter indukcyjny. Na wstępie zaproponowane są uczniom zadania, które pozwalają im korzystać z ich dotychczasowego doświadczenia. Na stronie 82 znajduje się ilustracja przedstawiająca zagon kapusty z ukrytymi w nim królikami. Może ona prowokować uczniów do stawiania pytań, formułowania zadań i szukania na nie odpowiedzi z zastosowaniem różnorodnych strategii liczenia, np. Czego jest więcej królików czy kapusty? Czy dla wszystkich królików starczy kapusty? Jak obliczyć ile jest kapusty?, itd. Następnie pojawia się kilka zadań nieproblemowych, przypominających wykonywanie działania dodawania lub być może zastosowania przez niektórych uczniów mnożenia (np. Na dwóch tablicach uczniowie klasy 2a rozwiesili obrazki. Obliczcie ile obrazków jest na każdej tablicy, a ile na dwóch tablicach razem, s. 83).

Dopiero po takim wprowadzeniu pojawia się przytoczone wyżej i zilustrowane zadanie z klasą lekcyjną, które może mieć wiele wariantów rozwiązania, jeśli uwzględni się pewne jego modyfikacje. Pierwszy wynikający z jego konstrukcji, kiedy uczniowie odpowiedzą na zaproponowane pytania. Będzie to wówczas zadanie zamknięte. Można jednak wykorzystać je do posłużenia się metodą kruszenia[62], kiedy punktem wyjścia będzie powyższa ilustracja (odpowiednik tzw. zadania bazowego: złożonego i bez pytania), prowokująca uczniów do różnych wersji postępowania:

[62] Por. E. Stucki, Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych, cz. II, Wydawnictwo WSP w Bydgoszczy, Bydgoszcz 1993, s. 54-62.

1) Układanie pytań, a potem działań do pytań,
2) Układanie działań, a potem pytań do działań,
3) Obmyślanie zadań szczegółowych do zadania bazowego i przedstawianie ich w zakodowanej formie (drzewka, grafu, formuły matematycznej),
4) Zabawa oparta o zadanie bazowe do polecenia: Co by było gdyby..?,
5) Układanie wszelkich możliwych pytań do zadania bazowego, ale z prawem do dokładania danych (zamieniania).

Przy takiej modyfikacji zadanie przyjmuje postać problemu i pobudza dzieci do samodzielnych poszukiwań w obrębie wybranego przez nauczyciela wariantu rozwiązania. Zwykłe zadanie tekstowe staje się wówczas zadaniem otwartym i okazją do poszukiwania własnych strategii jego rozwiązania.

5.2. Wiadomości i umiejętności praktyczne

To bardzo interesujący dla dzieci dział matematyki umożliwiający im wykonywanie wielu praktycznych działań związanych z odczytywaniem planu, mapy, wskazań zegara, stosowania obliczeń kalendarzowych, posługiwania się termometrem, miarami masy i pojemności, itd.

Przykładem zadania tego typu jest posługiwanie się mapą i odczytywanie informacji z niej wynikających. Przy tym zadaniu można skorzystać z zaproponowanych pytań, które wykorzystują umiejętność czytania funkcjonalnego lub prowokować uczniów do formułowania własnych.

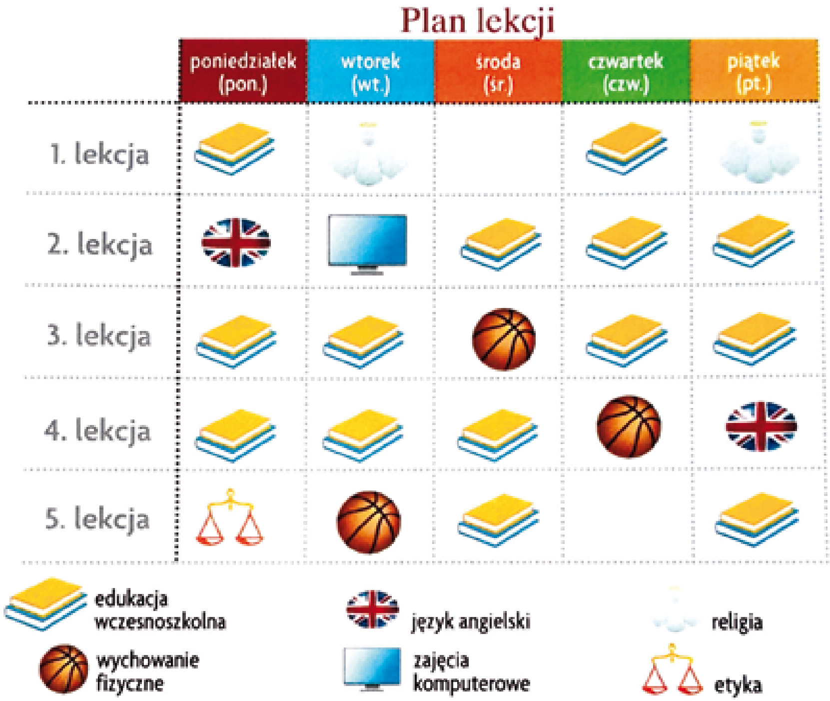
Przykład 1

1. Odczytajcie temperaturę na mapie pogody.

- Sprawdźcie na mapie, w którym mieście jest najwyższa temperatura, a w którym najniższa.
- Odczytajcie temperaturę w kolejności rosnącej, a potem malejącej.
- Gdzie temperatura wynosi więcej niż 15°C? Gdzie mniej niż 23°C?
- Jaka jest różnica temperatur między Gdańskiem a Białymstokiem?
- Między którymi miastami różnica temperatur jest najmniejsza?

Przykład 2

1. Popatrzcie na plan lekcji i powiedzcie, w których dniach tygodnia klasa 2a uczy się języka angielskiego.



- Którego dnia dzieci zaczynają lekcje później? Którego kończą wcześniej?
- Ile razy w tygodniu dzieci z klasy 2a zaczynają naukę od pierwszej lekcji?
- Mama chce zapisać Tomka na basen w dniu, w którym nie ma wychowania fizycznego. Nie chce też zapisać go w piątek. W którym dniu Tomek może uczęszczać na basen?
- Ułóżcie inne pytania dotyczące planu lekcji.

Zaproponowane pytania skłaniają uczniów do wyszukiwania informacji zawartych w tabeli. Nauczyciel może, ale nie musi ich zadać wszystkich. Ważne jest, aby dał okazję uczniom do konstruowania własnych przykładów pytań, bo te będą odsłaniały ich sposób myślenia i działania. Każde z dzieci będzie miało również okazję do opracowania lub przeanalizowania własnego planu dnia i posługiwania się nim w praktyce.

Obok przytoczonych przykładów w podręczniku znajdują się również zadania na obliczenia kalendarzowe, zapisywanie dat, odczytywanie wskazań zegara, obliczenia temperatury, itp. Każde z nich są bogato ilustrowane przykładami i zadaniami. Pamiętać jednak trzeba, że nic nie zastąpi praktycznego posługiwania się nimi. Dlatego, zgodnie z przywoływaną wcześniej zasadą: najpierw zrozumienie potem symbol, konieczne jest poprzedzanie ich działaniami na konkretach i organizowaniem sytuacji problemowych, w których dzieci będą mogły posługiwać się zegarkiem, termometrem, mapą, rozkładem jazdy, planem miasta. Wówczas ich wiedza będzie się budowała na praktycznym doświadczeniu i będzie uzasadnieniem dla posługiwania się matematyką w sytuacjach codziennego życia.

5.3. Figury

Tych treści w podręczniku jest stosunkowo niewiele.

5. Przygotujcie kwadratową kartkę. Złóżcie ją na pół i jeszcze raz na pół, tak jak na rysunku. Rozetnijcie kartkę wzdłuż linii zgięcia na osiem trójkątów.

- Ułóżcie prostokąty z kilku lub ze wszystkich otrzymanych trójkątów.
- Ułóżcie różne trójkąty z kilku lub ze wszystkich otrzymanych trójkątów.
- Czy można ułożyć trójkąt ze wszystkich otrzymanych trójkątów?

6. Hoan ułożył figurę z kilku trójkątów otrzymanych z kwadratu.
– Ta figura ma dużo boków – mówi Hoan. Policzcie, ile boków ma ta figura.

- Ułóżcie z trójkątów figurę o jak największej liczbie boków.

Obejmują one głównie zagadnienia dotyczące nazw i cech figur geometrycznych (trójkąt, kwadrat, koło, prostokąt, owal, pięciokąt, itd.), np. jak nazywają się poszczególne figury? s. 75, ile mają boków dane figury?, czy jak ułożyć daną figurę z patyczków.

Są również zadania konstrukcyjno-manipulacyjne, jak to zamieszczone powyżej. Dzieci operują wówczas na własnoręcznie wykonanym materialne, badając własności figur i możliwości ich wykorzystywania. Są one ciekawe, ale warto je wzbogacić lub uzupełnić o zadania związane np. z konstruowaniem ornamentów i mozaik oraz innych zadań praktycznych. To jednak może być okazją do inicjatywy uczniów i uruchomienia ich wyobraźni oraz umiejętności konstrukcyjnych.

Bibliografia:

Bruner J., Proces kształcenia, PWN, Warszawa 1965.

Bruner J., Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978.

Clemnson D. i W., Poznaję świat matematyki, Świat książki, Warszawa 1997.

Czajkowska M., Umiejętności matematyczne przyszłych polskich nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w świetle wyników badania TEDS, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2012, nr 1 (16).

Dąbrowski M., Wiatrak E., Nauczyciele nauczania początkowego w świetle ankiet, [w:] Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008, red. M. Dąbrowski, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2009.

Dąbrowski M., Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2008.

Dąbrowski M., O matematycznych wynikach polskich trzecioklasistów w badaniach TIMSS, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2013, nr 4(23).

Dąbrowski M., O rozwijaniu umiejętności matematycznych w nauczaniu zintegrowanym, [w:] Kształcenie zintegrowane. Problemy teorii i praktyki, red. M. Żytko, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa 2002.

Dudzikowa M., Mit o szkole jako miejscu wszechstronnego rozwoju ucznia. Eseje etnopedagogiczne, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2001.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Szkoła, rzeź talentów, „Dziennik Gazeta Prawna", 10-12 maja 2013.

Hanisz J., Zadania na szóstkę, WSiP, Warszawa 1999.

Kalinowska A., Poznawczy i kulturowy wymiar dezintegracji wczesnoszkolnych pojęć matematycznych, [w:] (Anty)edukacja wczesnoszkolna, red. D. Klus-Stańska, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2014.

Kalinowska A., Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2010.

Kamii C., Young children reinvent arithmetic, 2nd ed., Teacher College Press, New York 2000.

Klus-Stańska D., Wiedza i sposoby jej nabywania, [w:] Pedagogika wczesnoszkolna – dyskursy, problemy, rozwiązania, red. D. Klus-Stańska, M. Szczepska-Pustkowska, Wydawnictwo Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009.

Klus-Stańska D., Kalinowska A., Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa 2004.

Klus-Stańska D., Nowicka M., Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej, WSiP, Warszawa 2005.

Klus-Stańska D., Rzecz o ryzyku kulturowej nieadekwatności edukacji szkolnej, „Forum Oświatowe" 2005, nr 1(32).

Klus-Stańska D., Twórcze myślenie uczniów – mity, nieporozumienia, możliwości, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2008, nr 1(7).

Klus-Stańska D., Cyfrowi tubylcy w szkole cyfrowych imigrantów, czyli awatar w świecie Ptysia i Balbinki, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2013, nr 4(23).

Kwieciński Z., Socjopatologia edukacji, Mazurska Wszechnica Nauczycielska w Olecku, Olecko 1995.
Minge N., Minge K., Wolność od schematów, „Psychologia w Szkole" 2015, nr 1(47).
Nalaskowski A., O nieobowiązkowy kształt szkoły, [w:] Kontestacje pedagogiczne, red. B. Śliwerski, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 1993.
Nasza szkoła. Matematyka. Podręcznik do szkoły podstawowej. Klasa 2, część 1, Ministerstwo Edukacji Narodowej, Warszawa 2014.
Naucz małe dziecko myśleć i uczyć się, Wydawnictwo Ravi, Łódź 2004.
Neisse U., Cognitive psychology, Appelton Century Crofts, New York 1967.
Nęcka E., TroP, Twórcze rozwiązywanie problemów, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 1994.
Piaget J., Science of education and the psychology of the child, Viking Press, New York 1970.
Podstawa programowa wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dziennik Ustaw RP z 18.06.2014, poz. 803.
Program edukacyjny „Gramy w piktogramy" – pomysł na wspieranie edukacji matematycznej dzieci i jego wykorzystanie w praktyce szkolnej, „Problemy Wczesnej Edukacji" (materiał w druku).
Przygoda z klasą 2. Książka ucznia 2, WSiP, Warszawa 2003.
Schaffer H.R., Epizody wspólnego zaangażowania jako kontekst rozwoju poznawczego, [w:] Dziecko w świecie ludzi i przedmiotów, red. A. Brzezińska, G. Lutomski, Poznań 1994.
Stucki E., Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych, cz. II, Wydawnictwo WSP w Bydgoszczy, Bydgoszcz 1993.
Śliwerski B., Familiada edukacyjna, „Dziennik. Gazeta Prawna", 26-28 kwietnia 2013, nr 82(3472).
Thom R., Matematyka „nowoczesna" – pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, „Wiadomości matematyczne", XVIII, 1974.
Urbańska E., O stosunku kandydatów na nauczycieli klas początkowych do matematyki jako przedmiotu ich studiów [w:] Dydaktyka matematyki, red. Z. Krygowska, Seria V, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Warszawa 1985.
Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (2006/962/WE), Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej z 30.12.2006, L 394/15.

NOTATKI

NOTATKI

ORE
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. 22 345 37 00
fax 22 345 37 70

www.ore.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego