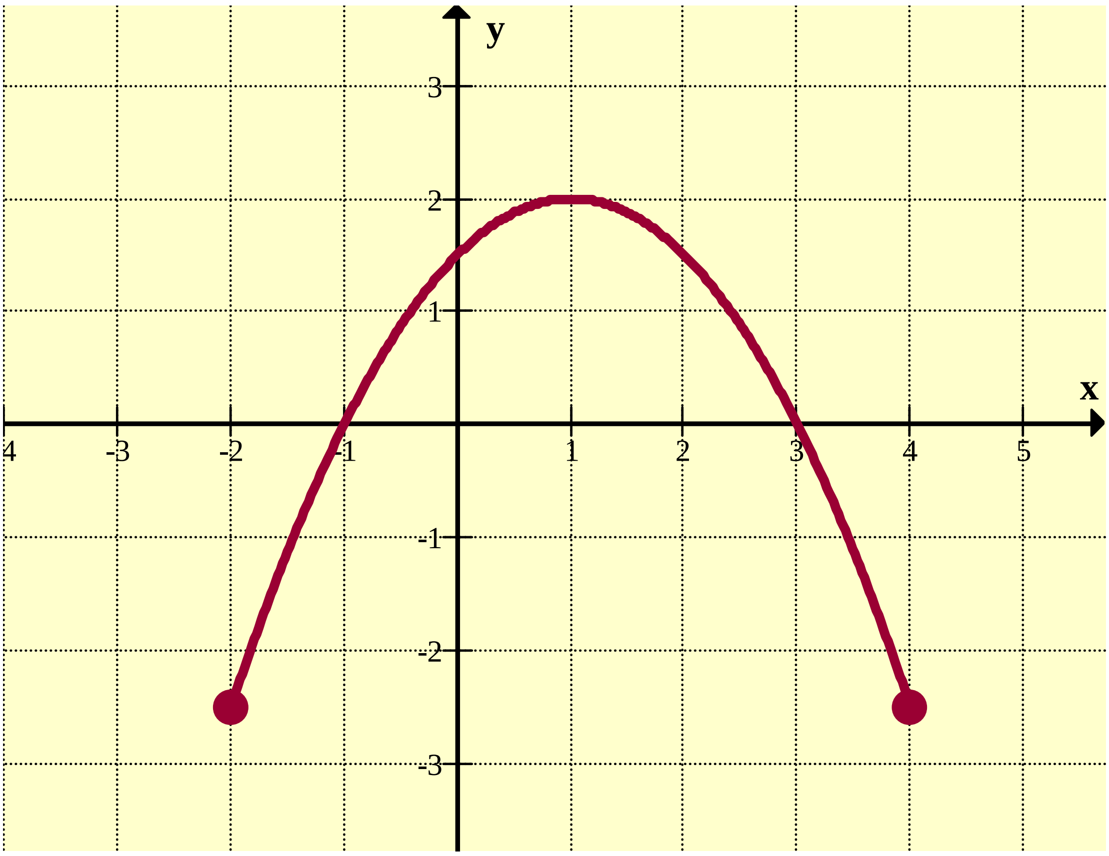
Mathematik 2



Ewa Ruszczyńska, Irena Wosz-Łoba

unter der Mitarbeit von Annette Fouque und Ilona Hensel

INHALTSVERZEICHNIS

Die Seiten von 9 bis 20, von 34 bis 37 und von 53 bis 86 wurden von Ewa Ruszczyńska bearbeitet.

Die Seiten von 3 bis 8, von 21 bis 33, von 38 bis 52 und von 87 bis 93 wurden von Irena Wosz-Łoba bearbeitet.

1. Polynome

Polynome

Den Ausdruck $W(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ nennt man ein **Polynom**[1]. Der **Grad des Polynoms** ist das größte n mit $a_n \neq 0$. Die Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms. a_0 ist das **absolute Glied**. Ein Polynom, dessen Koeffizienten alle Null sind, heißt Nullpolynom. Dem **Nullpolynom** wird kein Grad zugeordnet.

Zwei Polynome gleichen Grades sind genau dann gleich, wenn $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$ gilt.

Polynome kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Die **Nullstellen** des Polynoms P sind die Werte von x, für die $P(x) = 0$ ist.

x_0 ist genau dann eine Nullstelle des Polynoms W, wenn W durch $(x - x_0)$ teilbar ist.

Der **Rest aus der Division** des Polynoms W durch $(x - x_0)$ wird mit $W(x_0)$ bezeichnet.

Die ganzzahligen Nullstellen eines ganzzahligen Polynoms (d.h. die Koeffizienten a_i sind ganze Zahlen) kann man durch Ausprobieren finden. In Frage kommen diejenigen ganzen Zahlen, die Teiler des absoluten Gliedes a_0 sind

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

das absolute Glied – . . . .

das ganzzahlige Polynom – . . . .

der Grad des Polynoms – . . . .

der Koeffizient – . . . .

der Linearfaktor – . . . .

das Nullpolynom – . . . .

die Nullstelle des Polynoms – . . . .

das Polynom – . . . .

der Rest aus der Division – . . . .

teilbar – . . . .

[1] Polys (griech.): viel

1. Polynome

1.1. Gib den Grad der Polynome an.

1) $x^2 - 3x + 5$ - Polynom zweiten Grades, *2)* 100 - Polynom vom Grad Null,

a) $4x^5 - 6x^4 + 3x \; - 10$ - . . . .

b) $7x^7 - 10x^5 + 12x^3$ - . . . .

c) $9x - 4$ - . . . .

d) 8 - . . . .

1.2. Vereinfache die Polynome soweit wie möglich und bestimme den Grad der Polynome.

a) $2x - x - (4 + 7x)$, **b)** $4x(x - 1) + (x - 4)^2$, **c)** $(3x^2 + 4)^2 - x(x^3 - 16)$.

1.3. Für welche a – Werte ist $W(x) = (a^2 + 4a - 5)x^3 + (a^2 - 1)x^2 + 7x - 9$ ein Polynom?

a) ersten Gerades, **b)** zweiten Gerades, **c)** dritten Gerades?

1.4. Gegeben sind die Polynome:

$W(x) = -2x^2 + 3x - 1$, $V(x) = 4x^2 - 5x + 3$, $U(x) = -3x^2 - 8x + 7$.

a) berechne die Summe der Polynome W, V und U,

b) berechne die Differenz der Polynome V und U,

c) berechne das Produkt der Polynome W und U,

d) multipliziere das Polynom W mit –5.

1.5. Berechne den Wert des Polynoms für die Zahl 2.

a) $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$, **b)** $2(3x - 1)^2(x + 2)$, **c)** $0{,}25x^5 - 8$.

1.6. Gegeben ist das Polynom P. Berechne die Werte des Polynoms für die Zahlen –1, 0, 1

a) $P(x) = 3x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x - 1$ **b)** $P(x) = \frac{3}{4}x^7 - \frac{1}{7}x^3 + 3x^2 + 1$

1.7. Gib ein Polynom vom Grad 3 an, das die drei Nullstellen 0, 5 und $\sqrt{3}$ hat.

1.8. Welchen Wert: W(1), W(0), W(-1) muss man berechnen, um die Summe der Koeffizienten eines Polynoms zu ermitteln? Berechne die Summe der Koeffizienten des Polynoms $(6x^2 - 3x - 2)^{30}$.

1.9. Prüfe, ob die Zahl –1 Nullstelle des Polynoms $V(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$ ist.

1.10. Prüfe, ob die Polynome $V(x) = 8x^3 - 27$ und $U(x) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ gleich sind.

1.11. Für welche *a, b, c* – Werte sind die Polynome gleich?

a) $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$ und $(x - 2)(ax^2 + bx + c)$,

b) $12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$ und $(3x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

1.12. Berechne jeweils *a* und *b*.

a) $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x + b$; für $x = 0$ nimmt das Polynom den Wert 1 an, für $x = 1$ nimmt es den Wert 5 an.

b) $W(x) = -x^5 + 3x^4 - ax^3 + x + b$; $W(0) = 2$ und $W(1) = -4$.

1.13. Verwandle in ein Produkt (mit Hilfe der binomischen Formeln):

a) $x^2 - 5$, **b)** $9x^4 - \frac{1}{16}$, **c)** $(x - 3)^2 - y^2$, **d)** $x^5 - 100x^3$.

1.14. Faktorisiere die Polynome durch Ausklammern und benenne dann die Nullstellen.

a) $x^3 - 7x^2 - 3x + 21$, **b)** $x^3 + 4x^2 - x - 4$, **c)** $-24x^4 + 120x^3 + 30x^2 - 150x$.

1.15. Faktorisiere nach dem Beispiel: $x^4 + 81$.

Beispiel 1.1.

Um das Polynom $V(x) = x^4 + 16$ zu faktorisieren, kann man folgendermaßen vorgehen:

$x^4 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (\sqrt{8}\,x)^2 =$

$(x^2 + 4 - \sqrt{8}\,x)(x^2 + 4 + \sqrt{8}\,x)$.

1.16. Zeige, dass das Polynom $W(x) = x^6 - x^4 + 4x^2 - 4$ genau zwei Nullstellen hat.

1.17. Für welche *m* – Werte ist der Rest aus der Division des Polynoms

$W(x) = -3x^3 - 6x^2 + mx + m + 5$ durch $x + 2$ gleich -10?

1.18. Gib ein Beispiel für die Zahl *p*, so dass der Rest aus der Division des Polynoms

$px^3 + 3x - 1$ durch $x - 2$

a) eine natürliche Zahl ist, **b)** eine negative Zahl ist, **c)** eine irrationale Zahl ist.

1.19. Das Polynom $U(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kann man als Produkt von Linearfaktoren

darstellen: $U(x) = (2x - 10)(x - 4)(x + 2)$. Berechne *a*, *b*, *c* und *d*.

1.20. Für welche *m* – Werte ist eine Nullstelle des Polynoms $P(x) = 6mx^3 - 7mx^2 + 6m - 7$ gleich *m*?

1.21. Für welche *a*- und *b*-Werte ist das Polynom $V(x) = (2a - 3b)x^3 + (a + 3b + 9)x^2 - 5x - 7$

a) eine lineare Funktion?

b) gleich dem Polynom $8x^3 + 4x^2 - 5x - 7$?

c) Nimm $a = 2$, $b = -2$ an. Berechne den Rest aus der Division des Polynoms W durch

$x + 1$.

1.22. Die Zahlen –4, 0 und 2 sind die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades. Außerdem gilt $W(1) = -10$. Berechne den Koeffizienten a_3 des Polynoms W.

Beispiel 1.2.

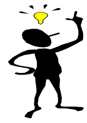
Die Zahlen –1, 2 sind die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades. Außerdem gilt $W(4) = 2$. Berechne den Koeffizienten a_3 des Polynoms W.

Lösung:

Das Polynom W(x) wird als Produkt der Linearfaktoren dargestellt:

$W(x) = a_3(x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

Wenn $W(4) = 2$, dann $2 = a_3(x + 1)(x - 2)(x - 3)$. Wir erhalten $a_3 = \frac{1}{5}$.



Polynomgleichungen

Gleichungen der Form $W(x) = 0$, wobei W ein Polynom vom Grad n ist, nennt man **Polynomgleichungen**.

Die Lösungen der Gleichung $W(x) = 0$ sind die Werte von x, für die $W(x) = 0$ ist.

1.23. Prüfe, ob die Zahl **a)** -1, **b)** 0, **c)** 2, **d)** 3

Lösung der Gleichung $2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$ ist.

1.24. Löse die Gleichungen.

a) $x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $2x^2 - 3x + 3 = 0$ **c)** $x^4 - x^2 - 12 = 0$

1.25. Löse nach dem Beispiel:

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$, **b)** $x^3 + 4x - 5 = 0$, **c)** $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

Beispiel 1.3.

Löse die Gleichung: $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Lösung: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) =$

$(x - 1)[x(x + 1) - 2] = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

Die Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x + 2 = 0$ sind $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$.

1.26. Berechne die Lösungen der Gleichungen.

a) $3x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$, **b)** $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$, **c)** $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$.

1.27. Ermittle die rationalen Lösungen der Gleichung $12x^2 - x = 4 - 3x^3$.

1.28. $x = -1$ ist die Lösung der Gleichung $2x^3 - (3m - 1)x^2 + mx - 7 = 0$. Ermittle m und berechne die anderen Lösungen der Gleichung.

1.29. $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ sind Lösungen der Gleichung $x^3 + mx^2 - 4x + n = 0$. Ermittle m und n. Berechne die dritte Lösung der Gleichung.

Das Horner-Schema

Mithilfe des Horner-Schemas *(William George Horner, 1786-1837)* können Polynomwerte berechnet und Polynome durch Linearfaktoren dividiert werden.

Beispiel: $P(x) = 2x^3 – 4x^2 + x + 1$

Mithilfe der folgenden Tabelle kann man die Division des Polynoms P durch den Linearfaktor (x–1) „automatisieren".
Wir schreiben die Koeffizienten in die oberste Zeile und die Zahl x = 1 (Nullstelle des Linearfaktors) an den linken Rand.

	2	**-4**	**1**	**1**
1				

Dann füllen wir die Tabelle folgendermaßen aus: Die erste Zahl aus der oberen Zeile wird in die untere übertragen. Ab nun multiplizieren wir immer die zuletzt angeschriebene Zahl mit 1, addieren die nächste Zahl aus der oberen Zeile und schreiben das Ergebnis in die untere Zeile (Merkregel: "mal links, plus oben").

	2	**–4**	**1**	**1**
1	2	–2	–1	0

Erklärung:

1. Spalte: 2 (wird von oben abgeschrieben)

2. Spalte: $1·2 – 4 = -2$

3. Spalte: $1·(–2) + 1 = –1$

4. Spalte: $1·(–1) + 1 = 0$

Das heißt: $P(1) = 0$ (letzte Spalte)

Gleichzeitig haben wir das Polynom durch (x - 1) dividiert. Denn die Zahlen in der 1. bis 3. Spalte sind die Koeffizienten des Polynoms, das wir bei der Division erhalten (die letzte Zahl gibt den Rest an). Wenn wir noch überlegen, dass der Grad des Polynoms bei der Division um 1 niedriger wird, können wir sofort aufschreiben:

$(2x^3 – 4x^2 + x + 1) : (x – 1) =2x^2 – 2x – 1$, Rest 0

Dividiere nach dem Horner - Schema: $\boldsymbol{(x^5 – 9x^3 + 2x + 5) : (x + 3)}$

Gebrochenrationale Funktionen

Der Graph der Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \in R\setminus\{0\}$, $D_f = R\setminus\{0\}$ heißt **Hyperbel**.

Der Faktor *a* bestimmt die **Krümmung** der Kurve.

Jede Hyperbel mit der Gleichung $y=\frac{a}{x}$ ist **punktsymmetrisch** zum Nullpunkt

und **achsensymmetrisch** zu den beiden Winkelhalbierenden (zu den Geraden mit der

Gleichung $y=x$ bzw. $y=-x$).

Jede Hyperbel besitzt zwei **Äste** (**Zweige**).

- Für $a>0$ liegen ihre Äste im I. und III. Quadranten.
- Für $a<0$ liegen ihre Äste im II. und IV. Quadranten.
- Die Gerade mit der Gleichung $y=0$ (*x*-Achse) ist **waagerechte Asymptote**.
- Die Gerade mit der Gleichung $x=0$ (*y*-Achse) ist **senkrechte Asymptote**.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Hyperbel - . . . .

die Krümmung - . . . .

punktsymmetrisch - . . . .

punktsymmetrisch zum Nullpunkt - . . . .

achsensymmetrisch - . . . .

achsensymmetrisch zu den beiden Winkelhalbierenden - . . . .

. . . .

der Ast, die Äste - . . . .

der Zweig - . . . .

die waagerechte Asymptote - . . . .

die senkrechte Asymptote - . . . .

Gebrochenlineare Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Quotient zweier linearer Funktionen ist, heißt **gebrochenlineare Funktion.**

Jede gebrochenlineare Funktion hat einen Funktionsterm der Form:

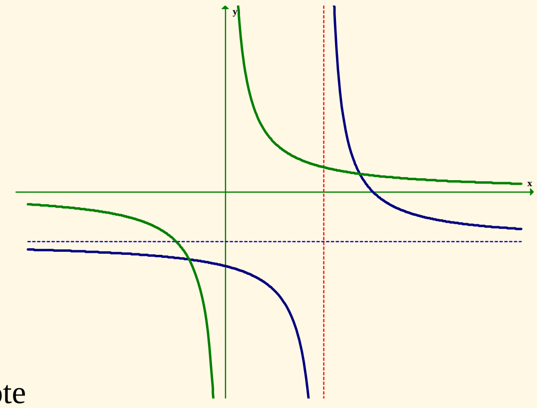
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{für } a,b,c,d \in R\text{,} \quad c \neq 0 \quad \text{und} \quad ad-bc \neq 0\text{.}$$

- Die Definitionsmenge der gebrochenlinearen Funktion ist $D_f = R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- Der Graph der gebrochenlinearen Funktion heißt **Hyperbel**.

Der Graph der Funktion $f(x)=\frac{a}{x-\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{q}$

entsteht aus dem Graphen der Funktion $g(x)=\frac{a}{x}$

durch Verschiebung mit dem Vektor $\vec{\boldsymbol{v}}=[\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}]$.



- $f(x)=\frac{a}{x-p}+q\,,\quad D_f = R \setminus \{p\}$
- $x=\boldsymbol{p}$ - die Gleichung der senkrechten Asymptote
- $y=\boldsymbol{q}$ - die Gleichung der waagerechten Asymptote
- der Graph ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten: $S=(p,q)$

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die gebrochenlineare Funktion - . . . .

der Quotient zweier linearer Funktionen - . . . .

die Verschiebung mit dem Vektor - . . . .

die Gleichung der waagerechten Asymptote -. . . . .

. . . .

die Gleichung der senkrechten Asymptote -. . . . .

. . . .

ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - . . . .

. . . .

Beispiel 1.

Zeichne den Graphen der gebrochenlinearen Funktion $f(x)=\frac{3-x}{x-2}$.

Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion.

Ermittle die Bereiche, in denen die Funktion f monoton zunimmt bzw. abnimmt.

1. **Definitionsmenge**: $D_f = R\setminus\{2\}$ wegen: $x-2\neq 0$
2. **Nullstellen**: $x=3$
3. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**:

   Der Graph schneidet die x-Achse im Punkt $A=(3,0)$.

   Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $B=(0,-\frac{3}{2})$. $f(0)=-\frac{3}{2}$
4. Der Funktionsterm $\frac{3-x}{x-2}$ lässt sich in die folgende Form umwandeln:

   $\frac{3-x}{x-2}=\frac{-(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$.

   Der Graph der Funktion $f(x)=\frac{3-x}{x-2}$ entsteht aus dem Graphen der Funktion $g(x)=\frac{1}{x}$

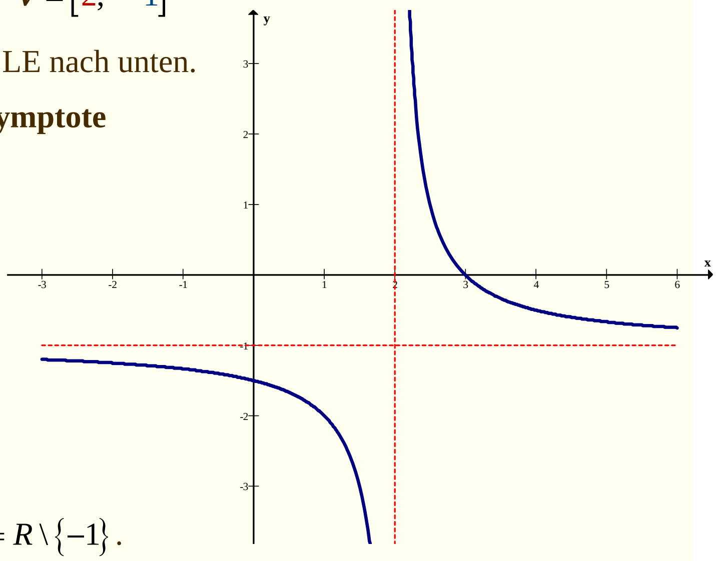
   durch Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v}=[2,\ -1]$

   also um 2 LE nach rechts und um 1 LE nach unten.
5. Der Graph hat eine **waagerechte Asymptote**

   mit der Gleichung $y=-1$

   und eine **senkrechte Asymptote**

   mit der Gleichung $x=2$.



6. Die **Wertemenge** der Funktion $W_f = R\setminus\{-1\}$.
7. **Monotonie**: Die Funktion ist streng monoton fallend (abnehmend) in den Intervallen

   $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$
8. Die Hyperbel ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten $S=(2,-1)$.

   Die Hyperbel ist achsensymmetrisch zu den Geraden mit der Gleichung

   $y+1=1\cdot(x-2)$ bzw. $y+1=-1\cdot(x-2)$.

Gegeben ist die Funktion:

2.1. $f(x)=\dfrac{-x-4}{x+3}$ **2.2.** $g(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ **2.3.** $h(x)=\dfrac{-3x+3}{x-2}$.

a) Bestimme die Definitionsmenge der Funktion.

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion.

c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.

d) Bestimme die Gleichungen der Asymptoten.

e) Zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem. (LE $=1$ cm)

f) Bestimme die Symmetrie anhand des Graphen.

g) Bestimme die Wertemenge.

h) Bestimme anhand dieses Graphen die Bereiche, in denen die Funktion streng monoton fällt bzw. steigt.

i) Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion positive Werte annimmt.

j) Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion negative Werte annimmt.

k) Überprüfe, ob der Punkt $P=(10,-1)$ auf dem Graphen der Funktion liegt. (Rechnerische Begründung notwendig.)

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Nullstellen der Funktion - . . . .

die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen - . . . . . .

. . . .

der Schnittpunkt mit der Abszissenachse - . . . .

. . . .

der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse - . . . .

. . . .

anhand des Graphen - . . . .

2.4. Gib den Funktionsterm der gebrochenlinearen Funktion mit den angegebenen Eigenschaften an. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion.

a) Die Geraden mit der Gleichung $x = 2$ und $y = -1$ sind die Asymptoten des Graphen und der Graph geht durch den Punkt $P = (3, 0)$.

b) Die Geraden mit der Gleichung $x = -3$ und $y = 2$ sind die Asymptoten des Graphen und der Graph geht durch den Punkt $P = (-2, 4)$.

c) Die Geraden mit der Gleichung $x = 1$ und $y = -2$ sind die Asymptoten des Graphen und die Funktion hat die Nullstelle 2.

d) Die Geraden mit der Gleichung $x = -2$ und $y = -1$ sind die Asymptoten des Graphen und die Funktion hat die Nullstelle 3.

e) Die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist Asymptote des Graphen und der Graph geht durch die Punkte $P = (3, 4)$ und $Q = (5, 2)$.

f) Die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ ist Asymptote des Graphen, der Graph geht durch den Punkt $P = (4, -1)$ und die Funktion hat die Nullstelle 5.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die gebrochenlineare Funktion - . . . .

die Wertemenge - . . . .

die Intervalle, in denen die Funktion positive Werte annimmt -

. . . .

die Intervalle, in denen die Funktion negative Werte annimmt -

. . . .

der Graph geht durch den Punkt -. . . . .

. . . .

2.5. Richtig oder falsch?

		R	F
a	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ ist definiert für alle reellen Zahlen.		
b	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ ist definiert für alle reellen Zahlen ohne Null.		
c	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ hat eine Nullstelle.		
d	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ nimmt nur positive Werte an.		
e	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $a>0$ ist streng monoton fallend für alle x aus dem Definitionsbereich.		
f	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $a<0$ ist streng monoton wachsend für alle x aus dem Definitionsbereich.		
g	Die Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $a>0$ ist streng monoton fallend im Intervall $(-\infty;0)$ und im Intervall $(0;+\infty)$.		
h	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ schneidet die Koordinatenachsen.		
i	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ ist symmetrisch zum Ursprung.		
j	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ besitzt zwei Symmetrieachsen.		
k	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y=x$.		
l	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y=-x$.		
m	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ hat zwei Asymptoten.		
n	Die Koordinatenachsen sind die Asymptoten des Graphen jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$.		
o	Der Graph jeder Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ hat eine schiefe Asymptote.		

2.6. Ergänze in $\square$ Begriffe aus der Wortliste, damit eine wahre Aussage entsteht. Es gibt jeweils nur eine richtige Lösung.

a) Der Graph einer Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $x \in R \setminus \{0\}$ und $a>0$ ist

$\square$
- ***A*** eine Parabel
- ***B*** eine Wendeparabel
- ***C*** eine Hyperbel
- ***D*** eine Exponentialkurve

und ihre Äste liegen $\square$
- ***A*** im I. und II. Quadranten
- ***B*** im II. und IV. Quadranten
- ***C*** im I. und III. Quadranten
- ***D*** im II. und III. Quadranten

.

b) Der Graph einer Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $x \in R \setminus \{0\}$ und $a<0$ ist

$\square$
- ***A*** eine Parabel
- ***B*** eine Wendeparabel
- ***C*** eine Hyperbel
- ***D*** eine Exponentialkurve

und ihre Äste liegen $\square$
- ***A*** im I. und II. Quadranten
- ***B*** im II. und IV. Quadranten
- ***C*** im I. und III. Quadranten
- ***D*** im II. und III. Quadranten

.

c) Der Graph einer Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $x \in R \setminus \{0\}$ und $a \neq 0$ ist

$\square$
- ***A*** symmetrisch zur *x*-Achse
- ***B*** symmetrisch zur *y*-Achse
- ***C*** symmetrisch zum Ursprung
- ***D*** nicht symmetrisch

und $\square$
- ***A*** geht durch den Nullpunkt
- ***B*** schneidet die Abszissenache
- ***C*** schneidet die Ordinatenachse
- ***D*** hat zwei Asymptoten

.

d) Eine Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $a>0$

ist $\square$
- ***A*** monoton fallend
- ***B*** monoton wachsend
- ***C*** streng monoton fallend
- ***D*** streng monoton wachsend

für $\square$
- ***A*** $x \in R$
- ***B*** $x \in R \setminus \{0\}$
- ***C*** $x \in (-\infty;0),\ x \in (0;+\infty)$
- ***D*** $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

.

e) Eine Funktion $f(x)=\frac{a}{x}$ für $a<0$

ist $\square$
- ***A*** monoton fallend
- ***B*** monoton wachsend
- ***C*** streng monoton fallend
- ***D*** streng monoton wachsend

für $\square$
- ***A*** $x \in R$
- ***B*** $x \in R \setminus \{0\}$
- ***C*** $x \in (-\infty;0),\ x \in (0;+\infty)$
- ***D*** $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

.

2.7. Ergänze in $\square$ Begriffe aus der Wortliste, damit eine wahre Aussage entsteht. Es gibt jeweils nur eine richtige Lösung.

a) Die Funktion $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$ hat $\square$.

A die Definitionsmenge $R\setminus\{-2\}$, die Wertemenge $R\setminus\{3\}$ und nimmt für $R\setminus\{-2\}$ ab

B die Definitionsmenge $R\setminus\{-2\}$, die Wertemenge R und nimmt für $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$ ab

C die Definitionsmenge $R\setminus\{-2\}$, die Wertemenge $R\setminus\{3\}$,
nimmt im Intervall $(-\infty;-2)$ und $(-2;+\infty)$ ab

D die Definitionsmenge $R\setminus\{-2\}$, die Wertemenge $R\setminus\{3\}$,
wächst im Intervall $(-\infty;-2)$ und $(-2;+\infty)$

b) Die Funktion $f(x)=\dfrac{2x-9}{x-4}$ hat $\square$.

A die Definitionsmenge $R\setminus\{4\}$, die Wertemenge R und nimmt für $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$ ab

B die Definitionsmenge $R\setminus\{4\}$, die Wertemenge $R\setminus\{2\}$ und nimmt für $R\setminus\{4\}$ ab

C die Definitionsmenge $R\setminus\{4\}$, die Wertemenge $R\setminus\{2\}$,
wächst im Intervall $(-\infty;4)$ und $(4;+\infty)$

D die Definitionsmenge $R\setminus\{4\}$, die Wertemenge $R\setminus\{2\}$,
nimmt im Intervall $(-\infty;4)$ und $(4;+\infty)$ ab

c) Der Graph der Funktion $f(x)=\dfrac{-2x+5}{x-3}$ hat $\square$.

A das Symmetriezentrum $S=(3,2)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=3$ und $y=2$

B das Symmetriezentrum $S=(-2,3)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=-2$ und $y=3$

C das Symmetriezentrum $S=(3,-2)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=-3$ und $y=2$

D das Symmetriezentrum $S=(3,-2)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=3$ und $y=-2$

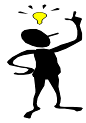
d) Der Graph der Funktion hat $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$ $\square$.

A das Symmetriezentrum $S=(3,2)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=3$ und $y=2$

B das Symmetriezentrum $S=(2,3)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=3$ und $y=2$

C das Symmetriezentrum $S=(3,2)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=3$ und $y=2$

D das Symmetriezentrum $S=(2,3)$, die Asymptoten mit der Gleichung: $x=2$ und $y=3$.



Bruchgleichungen

Jede Gleichung, in der ein Bruchterm auftritt, heißt Bruchgleichung.

Jede Bruchgleichung lässt sich in der Form $\frac{W(x)}{G(x)} = 0$ mit $G(x) \neq 0$ schreiben.

$$\frac{W(x)}{G(x)} = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0 \wedge G(x) \neq 0.$$

Beispiel 1.

Bestimme die Lösungsmenge: $\frac{2}{x+2} + 1 = \frac{x-2}{x^2+2x}$

Lösung:

1. Bestimme den Definitionsbereich der Bruchgleichung.

Der Nenner darf nicht Null werden. Man muss den zweiten Nenner faktorisieren.

Definitionsbereich: $x \in R \setminus \{-2, 0\}$

2. Bestimme den **Hauptnenner**. **HN**: $x(x+2)$

! Der **Hauptnenner** ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Einzelnenner.

3. Multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner.

$$\frac{2}{x+2} + 1 = \frac{x-2}{x^2+2x} \quad \Big| \cdot x(x+2)$$

$$\frac{2x(x+2)}{x+2} + x(x+2) = \frac{(x-2)x(x+2)}{x(x+2)} \quad \Big| \text{ kürzen so weit wie möglich}$$

$$2x + x^2 + 2x = x - 2 \quad \Big| \text{ zusammenfassen}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Big| \text{ quadratische Gleichung lösen}$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1$$

Die Zahl -2 gehört nicht zur Definitionsmenge. Sie ist eine Lösung der quadratischen Gleichung, aber keine Lösung der Ausgangsbruchgleichung.

Die Zahl -1 gehört zur Definitionsmenge, also ist sie eine Lösung der Ausgangsbruchgleichung.

Lösung: $x = -1$ ($L = \{-1\}$)

2.8. Bestimme jeweils die Lösungsmenge nach dem Muster. (Beispiel 1.)

a) $\frac{2}{x+4}+\frac{3}{x-4}=\frac{14}{x^2-16}$ **b)** $\frac{5}{x+2}+\frac{2x}{x^2-4}=1$ **c)** $\frac{5x+3}{x^2+2x+1}-\frac{x+5}{2x+2}=\frac{x}{x+1}$

d) $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{x^2}{x^2-4}+1$ **e)** $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

2.9. Bestimme die richtige Reihenfolge der Tätigkeiten bei der Lösung einer Bruchgleichung.

Lösungsschritte für das Lösen einer Bruchgleichung:

1. . . . **2.** . . . **3.** . . . **4.** . . . **5.** . . .

. ***A.*** Die Lösungen der entstehenden bruchtermfreien Gleichung bestimmen.

. ***B.*** Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren und vollständig kürzen.

. ***C.*** Den Hauptnenner ermitteln.

. ***D.*** In der Definitionsmenge der Bruchgleichung enthaltene Lösungen der quadratischen Gleichung angeben.

. ***E.*** Die Definitionsmenge der Bruchgleichung festlegen.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Bruchterm - . . . .

die Bruchgleichung - . . . .

den Nenner faktorisieren - . . . .

der Hauptnenner - . . . .

den Hauptnenner ermitteln - . . . .

das kleinste gemeinsame Vielfache - . . . .

die Ausgangsbruchgleichung - . . . .

die bruchtermfreie Gleichung - . . . .

Bruchgleichungen - Textaufgaben

2.10. Ein Bruch hat den Wert $\frac{1}{3}$. Wenn man Zähler und Nenner um 4 vermindert, entsteht ein Bruch vom Wert $\frac{1}{11}$. Gib den Ausgangsbruch an.

2.11. Der Nenner eines Bruches ist um 3 größer als der Zähler. Wenn man zu beiden 4 addiert, erhält man einen Bruch vom Wert $\frac{3}{4}$. Bestimme den ursprünglichen Bruch.

2.12. Wenn man eine unbekannte Zahl vom Nenner von $\frac{4}{11}$ subtrahiert und zum Zähler von $\frac{6}{22}$ addiert, bekommt man wertgleiche Brüche. Wie heißt die unbekannte Zahl?

2.13. Der Nenner eines Bruches ist um 2 größer als der Zähler. Der Zähler eines zweiten Bruches ist gleich dem Nenner des ersten Bruches. Der Nenner des zweiten Bruches ist das Fünffache des Zählers des ersten Bruches. Wenn man die beiden Brüche addiert, erhält man $\frac{14}{15}$. Wie groß ist der erste Bruch?

2.14. Die Summe des Zählers und Nenners eines Bruches beträgt zusammen 30. Wenn man die Zahl 5 zum Zähler addiert und vom Nenner subtrahiert, erhält man das Doppelte der ursprünglichen Bruchzahl. Bestimme den Ausgangsbruch.

2.15. Der Zähler eines Bruches ist um 4 kleiner als der Nenner. Wenn man den Zähler um 4 vermehrt und den Nenner um dieselbe Zahl vermindert, bekommt man den Kehrwert des Ausgangsbruches. Bestimme den Ausgangsbruch.

2.16. Die Summe der Kehrwerte einer Zahl und einer um 8 verminderten Zahl sowie das Doppelte des Kehrwertes der um 8 vermehrten Zahl sind gleichwertig. Wie heißt diese Zahl?

2.17. Eine Klasse hat einen Bus für eine Klassenfahrt für 312 € gemietet. Zwei Schüler können nicht mitfahren. Die Fahrtkosten für die restlichen Schüler erhöhen sich um 1 €.

a) Bestimme die Anzahl der Schüler in der Klasse.

b) Wie hoch waren die ursprünglichen Fahrtkosten pro Person?

2.18. Eine Gruppe mietet für eine Fahrt einen Bus für 135 €. Die Kosten werden gleichmäßig verteilt. Wären drei Personen mehr mitgefahren, hätten sich die Kosten für jeden Teilnehmer um 1,50 € verringert.

a) Bestimme die Anzahl der Teilnehmer.

b) Wie hoch sind die tatsächlichen Fahrtkosten pro Person?

2.19. Eine Arbeit wird vom Arbeiter A in 20 Tagen, vom Arbeiter B in 30 Tagen ausgeführt. Wie viel Zeit brauchen sie für diese Arbeit, wenn sie zugleich arbeiten?

2.20. Eine Arbeit wird vom Arbeiter A in 20 Tagen, von den Arbeitern A und B in 7 Tagen und 4 Stunden ausgeführt. Wie viele Tage braucht B allein für die gesamte Arbeit?
(1 Arbeitstag = 8 Stunden)

2.21. Eine Arbeit wird von drei Arbeitern (A, B und C) ausgeführt. Der Arbeiter A braucht allein zehn Tage, der Arbeiter B braucht allein fünfzehn Tage, der Arbeiter C braucht allein zwölf Tage. Wie viel Zeit brauchen sie für diese Arbeit, wenn alle zugleich arbeiten?

2.22. Anna braucht für eine Arbeit zehn Tage. Nachdem sie schon zwei Tage gearbeitet hat, hilft ihr Katja. Beide beenden den Rest der Arbeit in drei Tagen. Wie viele Tage braucht Katja allein für die gesamte Arbeit?

2.23. Drei Zuflussrohre füllen einen Wasserbehälter. Durch das erste Rohr wird der Behälter in 20 Minuten gefüllt, durch das zweie Rohr in 24 Minuten und durch das dritte Rohr in 30 Minuten. In welcher Zeit füllen alle drei Rohre zugleich den Behälter?

2.24. Zwei Zuflussrohre füllen einen Wasserbehälter in 6 Minuten. Das erste Rohr allein füllt den Behälter 5 Minuten langsamer als das zweite Rohr allein. In welcher Zeit füllt jedes Rohr allein den Behälter?

Trigonometrie

Als **Katheten** werden die beiden Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet, die den rechten Winkel bilden; die dem rechten Winkel gegenüberlegende Seite wird **Hypotenuse** genannt.

In Bezug auf die spitzen Winkel des Dreiecks spricht man von der **Ankathete** des Winkels als die dem Winkel anliegende Kathete, und von der **Gegenkathete** als die dem Winkel gegenüberlegende Kathete.

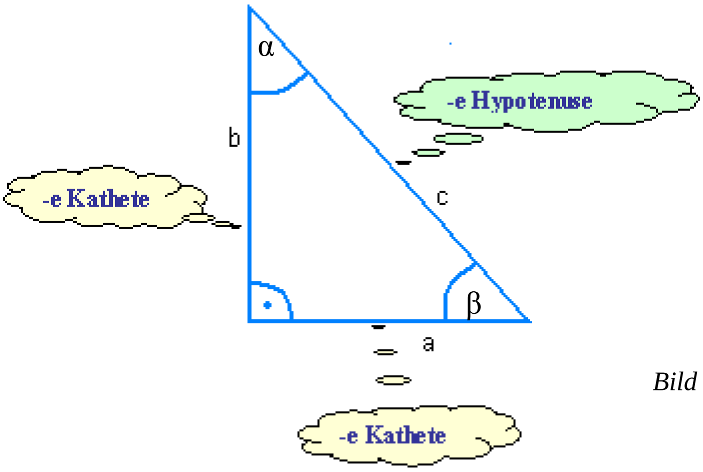


Bild 3.1

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Ankathete - . . . .

die Gegenkathete - . . . .

die Hypotenuse - . . . .

die Kathete - . . . .

der Cosinus - . . . .

der Sinus - . . . .

die Trigonometrie - . . . .

der rechte Winkel - . . . .

der spitze Winkel - . . . .

3. Trigonometrie

3.1. Ergänze die Tabelle mit den Begriffen: Hypotenuse, Ankathete, Gegenkathete. (*Bild 3.1*)

	Seite mit der Länge a	Seite mit der Länge b	Seite mit der Länge c
Winkel α			
Winkel β			

3.2. Ergänze die Definitionen von sin α, cos α, tg α, ctg α im rechtwinkligen Dreieck unter Verwendung der Begriffe: Hypotenuse, Ankathete, Gegenkathete.

sin α = ____________________ tg α = ____________________

cos α = ____________________ ctg α = ____________________

3.3. Ergänze die Sätze nach dem Muster :

Der** Sinus **eines Winkels ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse.

***Der** Cosinus **eines Winkels ist das Verhältnis** . . . .*

. . . .

***Der** Tangens **eines Winkels ist das Verhältnis** . . . .*

. . . .

***Der** Cotangens **eines Winkels ist das Verhältnis** . . . .*

. . . .

3.4. Bestimme rechnerisch die Größen der beiden spitzen Innenwinkel des Dreiecks.

a)

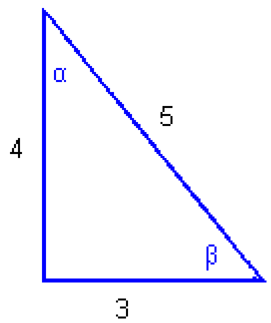


Bild 3.2

b)

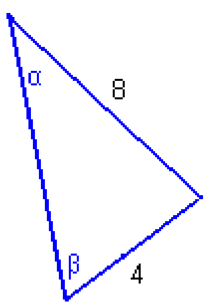


Bild 3.3

c)

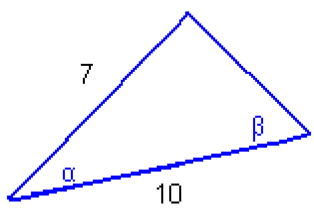


Bild 3.4

3.5. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Ankathete des Winkels α 8 LE lang und $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Wie lang ist: a) die Gegenkathete , b) die Hypotenuse?

3.6. Die Winkel α, β, γ, δ sind spitze Winkel. Markiere diese Winkel in den Dreiecken, wenn $\sin\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{7}$ und $\operatorname{ctg}\delta = \frac{7}{3}$ gelten.

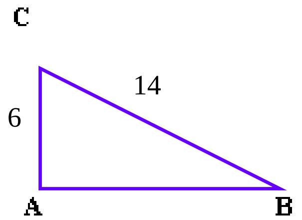


Bild 3.5

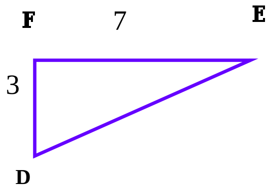


Bild 3.6

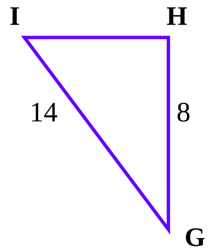


Bild 3.7

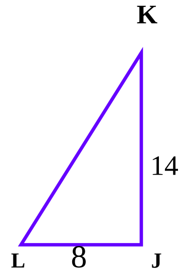


Bild 3.8

3.7. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete doppelt so lang wie die andere. Wie groß sind die spitzen Innenwinkel des Dreiecks?

3.8. Konstruiere einen Winkel, dessen:

a) Tangens gleich $\frac{5}{4}$ ist, **b)** Sinus gleich 0,8 ist.

3.9. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 5 cm und einem spitzen Winkel α, so dass $\sin\alpha = \frac{7}{10}$.

3.10. Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC hat 24 cm Umfang und der Innenwinkel BAC misst 75°. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC?

3.11. Von einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b sind der Flächeninhalt und eine weitere Größe gegeben. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks.

a) $P = 30\ \text{cm}^2$, $b = 6$ cm, **b)** $P = 6\ \text{cm}^2$, $\alpha = 50^\circ$, **c)** $P = 12\ \text{cm}^2$, $c = \sqrt{73}$ cm.

3.12. Ergänze die trigonometrische Gleichung für die beiden spitzen Winkel des Dreiecks in *Bild 3.9*. Für die Gleichung gibt es vier Möglichkeiten!

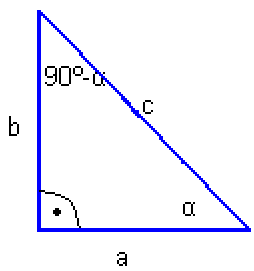


Bild 3.9

$$\ldots\ldots\ \alpha = \ldots\ldots\ (90^\circ - \alpha).$$

Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

3.13. Beschreibe die Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke (*Bild 3.10*). Verwende dabei die Begriffe „Basiswinkel“ und „Schenkel“.

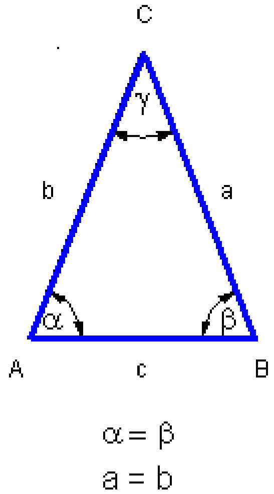


Bild 3.10

3.14. Ist der Satz richtig oder falsch?

Ein gleichschenkliges Dreieck

a) *ist auch gleichseitig,*

b) *kann rechtwinklig sein,*

c) *kann einen stumpfen Winkel haben,*

d) *kann man in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.*

3.15. Berechne die Längen der Grundseite und der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Schenkellänge 7 cm und einem Winkel von 70° zwischen den beiden Schenkeln.

3.16. Berechne die Winkelmaße eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis 3 cm und der Höhe 6 cm.

3.17. Gegeben sind in einem gleichschenkligen Dreieck ABC (*Bild 3.11*) die Seitenlängen $a = b = 16$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Es sind c und α zu berechnen.

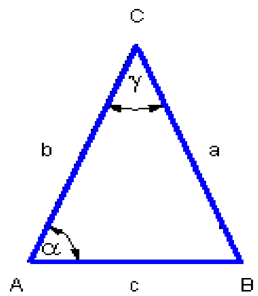


Bild 3.11

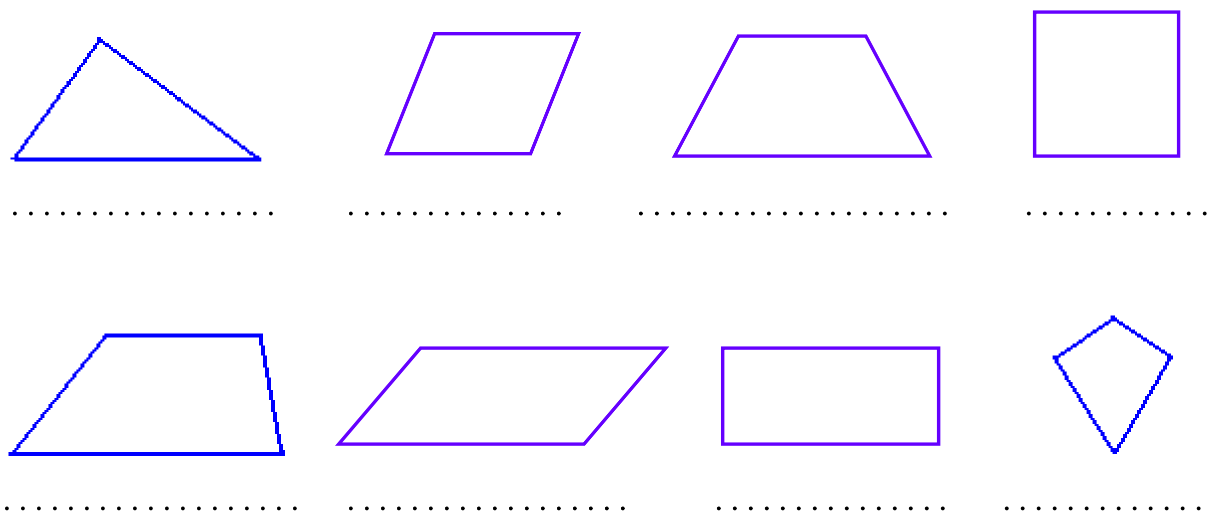
3.18. Im gleichschenkligen Dreieck (*Bild 3.11*) sind gegeben: $c = 10$ cm, $\alpha = 53°$.

Bestimme zunächst die noch fehlenden Größen, und dann den Flächeninhalt des Dreiecks nach der Formel: $P = \frac{1}{2}\, bc \sin\gamma$ berechnen zu können.

Anwendungen der Winkelfunktionen in der Planimetrie

3.19. Beschrifte die Figuren und zeichne Hilfslinien so ein, dass du ein rechtwinkliges Dreieck erhältst.

Parallelogramm · Quadrat · Raute (Rhombus) · beliebiges Dreieck
Trapez · Rechteck · Drachen · gleichschenkliges Trapez



Beispiel 3.1

Berechne die Höhe und den Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seitenlängen a = 10 cm, b = 7 cm und dem spitzen Winkel α, wenn sin α = 70°.

<u>*Lösung:*</u>

$a = 10$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 70\,°$

$\sin\alpha = \dfrac{h}{b}$, $\sin 70\,° \approx 0{,}94$

$\dfrac{h}{b} = 0{,}94$, $h = 7 \cdot 0{,}94$, $h = 6{,}58$ cm.

$P = a \cdot h$, $P = 10 \cdot 6.58 = 65.8\ \text{cm}^2$.

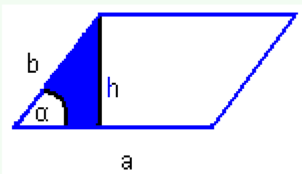


Bild 3.12

3.20. Berechne die Höhe des Parallelogramms mit den Seitenlängen 8 cm und 12 cm sowie dem stumpfen Winkel 120°.

3.21. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seitenlängen a = 15 cm und b = 10 cm sowie dem spitzen Winkel α = 45°.

3.22. Von einem Rhombus sind der Flächeninhalt $P = 4\ m^2$ und ein Winkel mit 60° gegeben. Berechne die Länge der Seite und die Länge der Diagonalen des Rhombus auf Zentimeter genau.

3.23. Von einer Raute *ABCD* ist bekannt, dass ihre Diagonale *AC* doppelt so lang wie die Diagonale *BD* ist. Der Flächeninhalt beträgt $20\ cm^2$.

a) Berechne die Längen der beiden Diagonalen.

b) Berechne die Seitenlänge der Raute.

c) Wie groß sind die Innenwinkel der Raute?

3.24. Von einem Rechteck *ABCD* sind eine Diagonale (Länge 6 cm) sowie ein von den Diagonalen eingeschlossener Winkel α = 50° gegeben. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

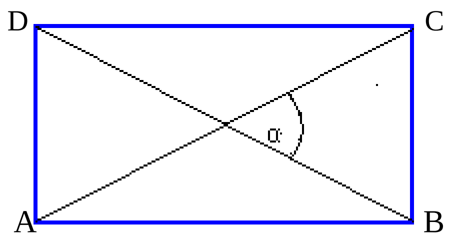


Bild 3.13

3.25. Berechne den Flächeninhalt des Trapezes (*Bild 3.14*).

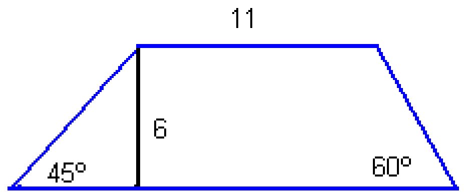


Bild 3.14

3.26. Ein in den Eckpunkten *B* und *D* rechtwinkliger Drachen hat eine 10 cm lange Diagonale *AC*.
Der Innenwinkel *BAD* misst 80°.
Berechne die Länge der Diagonalen *BD* und die Seitenlängen des Drachens.

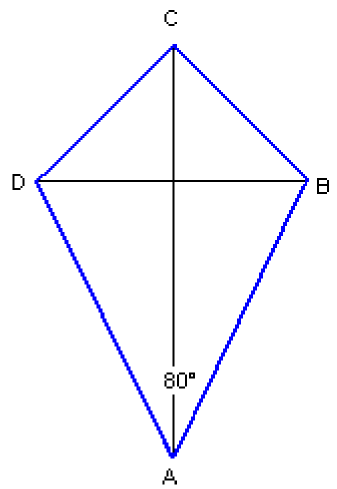


Bild 3.15

3.27. Wie groß sind die Winkel in den Figuren?

a)

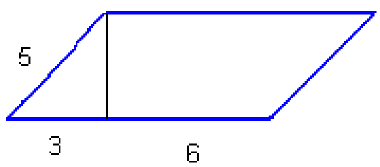


Bild 3.16

b)

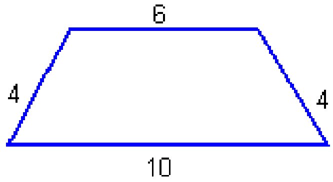


Bild 3.17

c)

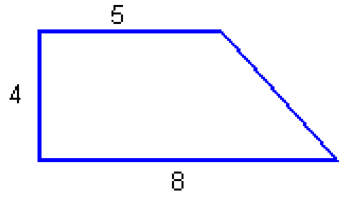


Bild 3.18

3.28. Die Länge h einer Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge *a* lässt sich wie folgt berechnen: h = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. Leite diese Formel aus der Definition der trigonometrischen Funktionen ab.

3.29. Im Dreieck *ABC* hat die Seite *c* die Länge 8 cm, die Seite *b* ist 12 cm lang, der Winkel α misst 55°. Berechne die Länge der Seite *a*.

Hinweis: Fertige eine Skizze an, fälle von *C* aus das Lot auf *AB*, und berechne sodann die Höhe h_c.

3.30. Gegeben ist ein Umkreiswinkel. Berechne die Länge der roten Sehne *AB*.

a)

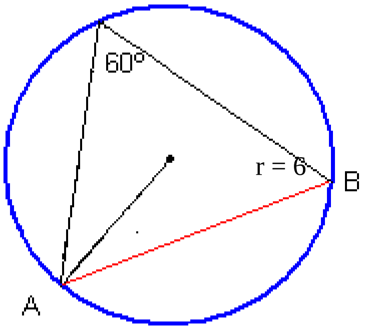


Bild 3.19

b)

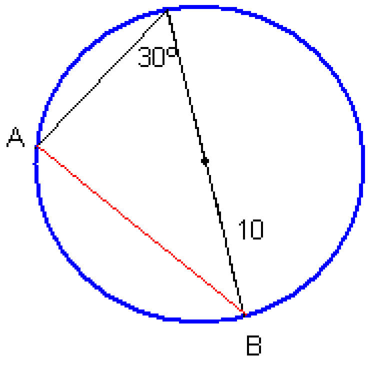


Bild 3.20

3.31. In der Antike benutzte man als Grundfigur nicht das rechtwinklige Dreieck, sondern den Kreis. Zeichnet man in einem Kreis mit dem Radius r einen Mittelpunktswinkel α mit 0°≤ α ≤ 180° ein, so schneidet er aus dem Kreis eine Sehne der Länge *s* aus (*Bild 3.21*). Berechne s für r = 6 cm und α = 140°.

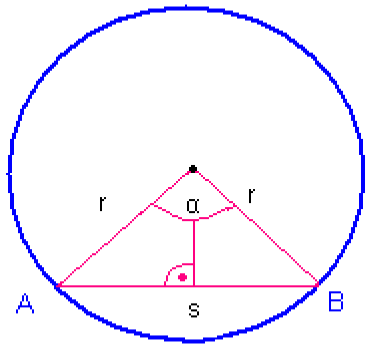


Bild 3.21

Anwendungen der Winkelfunktionen im Alltag

Die Steigung einer Straße AC wird als Verhältnis des Höhenunterschiedes h zur horizontal gemessenen Entfernung e angegeben:

$$\frac{h}{e} = \text{tg}\ \alpha.$$

Sie wird in Prozent angegeben.

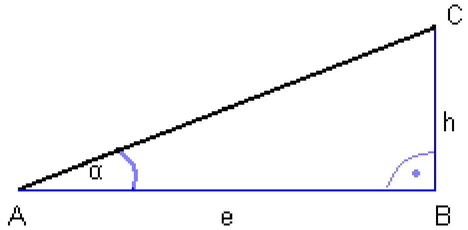


Bild 3.22

Beispiel 3.2

1) Ist h = 15 m, e = 500 m, so ist die Steigung $\frac{15m}{500m}$ = 0,03 = 3%.

2) Ist die Steigung 2,5% , e = 1 km, so ist tg α = 0,25 und tg α = $\frac{h}{1km}$.

   Aus der Gleichung 0,25 = $\frac{h}{1km}$ erhalten wir h = 250 m.

3.32. Unter welchem Winkel steigt eine Straße mit der Steigung 7% an?

3.33. Aus einer Wanderkarte mit eingezeichneten Höhenlinien entnimmt man die Entfernung e = 800 m und den Höhenunterschied h = 120 m. Welche Steigung hat der Wanderweg AC? Wie lang ist er? Unter welchem Winkel α steigt er an?

3.34. Auf dem Straßenschild (*Bild 3.23*) steht die Länge der Straße und die Steigung. Berechne den Höhenunterschied und die horizontale Entfernung. Unter welchem Winkel α steigt die Straße an?

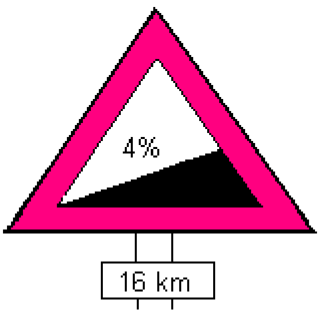
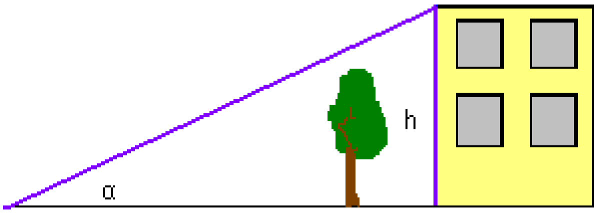


Bild 3.23

3.35. Ein Gebäude (*Bild 3.24*) erscheint aus der Entfernung e = 200 m unter dem Höhenwinkel α = 15° . Wie hoch ist das Gebäude?



3.36. Ein Gebäude ist 18 m hoch. Wie groß ist die Entfernung e, wenn das Gebäude unter dem Höhenwinkel α = 30° erscheint ?

3.37. Ein Baum (*Bild 3.25*) wirft bei einem Sonnenstand von 40° Höhe einen Schatten von 35 m Länge. Wie hoch ist der Baum?

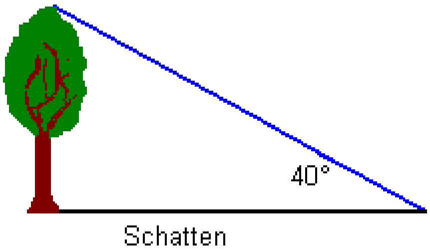


Bild 3.25

3.38. Um die Breite f eines Flusses (*Bild 3.26*) zwischen B und C zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen:

Man legt zwei Messpunkte A und D fest, so dass A, B und C in einer geraden Linie liegen und gleichzeitig der Winkel CAD ein rechter Winkel ist. Man misst nun die Länge der Strecke AD sowie die Winkel α und γ, und kann dann f errechnen. Berechne f aus folgenden Messergebnissen $|AD|$ = 100 m, α = 75°, γ = 69°.

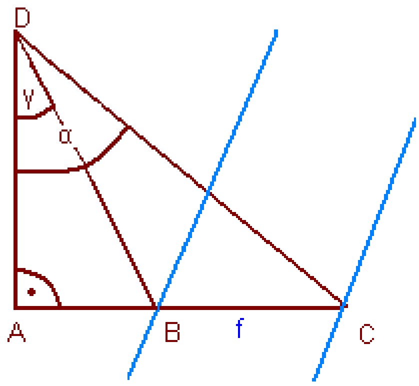


Bild 3.26

3.39. In einem Park wird ein dreieckiges Rasenstück neu angesät. Zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind 3 m bzw. 7 m lang, der dazwischen liegende Winkel misst 55°. Wie viel Grassamen benötigt man, wenn pro Quadratmeter 40 g Grassamen gesät werden?

3.40. Die Türme des Kölner Doms sind 157 m hoch. In welcher Entfernung vom Dom erscheinen sie unter einem Neigungswinkel von 30°? Fertige eine Skizze an!

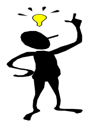
3.41. Ein Fernsehturm wirft einen 178 m langen Schatten. Wie hoch ist der Turm, wenn die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von 35° auf die Erde treffen? Fertige eine Skizze an!

3.42. Eine Laderampe soll eine Höhe von 1,5 m haben. Wie lang muss die Rampe sein, wenn der Neigungswinkel 25° beträgt? Fertige eine Skizze an!

3.43. Eine 8 m lange Leiter wird unter einem Winkel von 70° an eine Wand gestellt. Bis zu welcher Höhe reicht die Leiter?

3.44. Ein Ballon wird von einem Punkt *A* unter einem Winkel von 80° und von einem Punkt *B* unter einem Winkel von 35° gesehen. Die Punkte *A* und *B* liegen auf dem Erdboden auf einer Geraden, wobei *A* und *B* 1400 m auseinander liegen. In welcher Höhe fliegt der Ballon?

Beziehungen zwischen Winkelfunktionen des gleichen Winkels



Es gelten sehr viele Beziehungen zwischen trigonometrischen Ausdrücken. Insbesondere kann man jede Art von trigonometrischem Ausdruck (sin, cos usw.) durch jeden anderen ausdrücken. Im folgenden sind nur einige wichtige Beziehungen aufgelistet:

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (3) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(2) $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$ (4) $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Der Satz (1) wird auch „trigonometrischer Pythagoras“ genannt.

Beachte: Es ist $\sin^2 \alpha = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$, aber $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha \cdot \alpha)$.

(5) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ (7) $\text{tg}\,(90° - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$

(6) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ (8) $\text{ctg}\,(90° - \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

3.45. Zeige mit Hilfe des Satzes des Pythagoras, dass der „trigonometrische Pythagoras“ in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck gilt.

Ergänzungsaufgaben zur Trigonometrie

3.46. Prüfe, ob für einen Winkel α gleichzeitig gelten kann:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ und $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

3.47. Für welchen Winkelgrad gilt $\sin\alpha = \cos\alpha$?

3.48. $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Ermittle jeweils die Werte für cos α, tg α, ctg α.

3.49. Für den Winkel α gelte $\text{tg}\,\alpha = \frac{5}{7}$. Ermittle jeweils die Werte für sin α, cos α, ctg α.

3.50. Von einem Winkel α sei gegeben $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$. Ermittle jeweils die Werte für cos α, tg α, ctg α.

3.51. Zeige, dass: **a)** $\text{tg}\,37^\circ \cdot \text{tg}\,53^\circ = 1$, **b)** $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ = 1$.

3.52. Von den Winkeln α und β sei bekannt: $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ und $\cos\beta = \frac{1}{6}$. Ermittle jeweils den Wert für: **a)** $\sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, **b)** $\sin\alpha\,\text{ctg}\,\beta + \cos\beta\,\text{tg}\,\alpha$.

3.53. Von dem Winkel α sei bekannt: $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$. Ermittle jeweils die Werte für sin α, cos α, tg α, ctg α.

3.54. Vereinfache die Ausdrücke:

a) $\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha$, **b)** $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$, **c)** $\text{tg}\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

3.55. Prüfe, ob die Gleichungen stimmen:

a) $(\text{tg}\,\alpha - 1)(\text{ctg}\,\alpha + 1) = \text{tg}\,\alpha - \text{ctg}\,\alpha$, **b)** $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha$.

Abituraufgaben

3.56. In einem rechtwinkligen Trapez sei die längere Grundseite 8 cm lang, der kürzere Schenkel 5 cm lang und der spitze Winkel betrage 50º.

a) Ermittle die Werte der trigonometrischen Funktionen des spitzen Winkels.

b) Berechne die Länge des zweiten Schenkels.

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

3.57. Berechne nach dem Beispiel $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, wenn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Beispiel 3.3

Gegeben ist $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$. Berechne $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$.

<u>*Lösung:*</u>

1) Nach der binomischen Formel $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ gilt:

$$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha).$$

2) Aus dem ***trigonometrischen Pythagoras*** folgt*:*

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = (\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha).$$

3) Man muss den Wert des Produkts $\sin \alpha \cos \alpha$ berechnen:

wenn $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, dann $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Wir erhalten die Gleichungen: $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$ und $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$.

4) Demnach gilt: $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{27}$.

3.58. Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{1}{3}x$ und $x = 6$.

a) Gib die Koordinaten des Schnittpunktes *P* der Geraden an.

b) Ermittle die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden $x = 6$ mit der x-Achse.

c) Berechne die Länge der Strecke *OP* mit dem Satz des Pythagoras, wobei *O* der Ursprung des Koordinatensystems ist.

d) Berechne die Werte der trigonometrischen Funktionen des Winkels *POS*.

3.59. Gegeben ist der Graph der Funktion $f(\alpha) = \sin\alpha$ im Intervall <0º, 360º> .

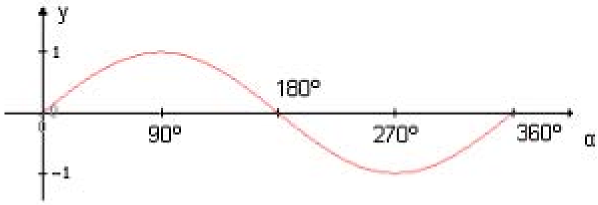


Bild 3.27

Gib anhand dieses Graphen im Intervall <0º, 360º> an:

a) die Definitionsmenge der Funktion *f*;

b) die Wertemenge der Funktion *f*;

c) die Nullstellen der Funktion *f*;

d) das größte Intervall, in dem die Funktion monoton fällt;

e) das größte Intervall, in dem die Funktion monoton wächst;

f) das Intervall, in dem die Funktion positive Werte annimmt;

g) den kleinsten und den größten Funktionswert.

3.60. Gegeben ist der Graph der Funktion $y = \cos\alpha$

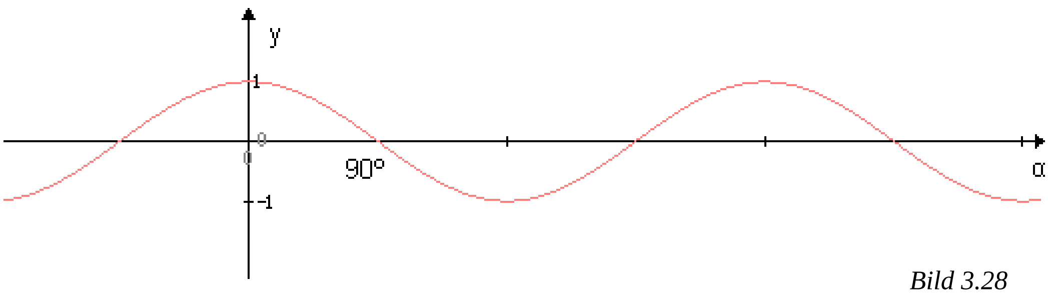


Bild 3.28

a) zeichne den Graphen der Funktion $y = \cos(\alpha + 90^\circ)$

b) zeichne den Graphen der Funktion $y = \cos\alpha + 1$.

3.61. Die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind identisch mit zwei Nullstellen des Polynoms $W(x) = x^3 + 5x^2 - 36x - 180$.

a) Berechne die Längen der Katheten des Dreiecks.

b) Berechne die Länge der Hypotenuse des Dreiecks.

c) Ermittle die Werte der trigonometrischen Funktionen des kleinsten Winkels in dem Dreieck.

d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Trigonometrie - Abituraufgaben

3.62. Ein Rechteck ist 6 cm lang und 3 cm breit.

a) Wie lang sind die Diagonalen?

b) Welche Winkel bilden seine Diagonalen mit den Seiten?

c) Welche Winkel bilden seine Diagonalen miteinander?

Gib die Winkelgröße im Gradmaß an.

3.63. Die Diagonalen eines Rechtecks sind 16 cm lang und bilden einen Winkel von 30° miteinander. Wie lang sind die Rechteckseiten?

Gib das Ergebnis als genauen Wert an. Nimm für $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ an.

3.64. Die Diagonalen eines Rechtecks bilden miteinander einen Winkel von 60°. Eine Seite des Rechtecks ist 12 cm lang. Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks. (Es gibt zwei Lösungen.) Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

3.65. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist $2\sqrt{5}$ cm lang und der Tangenswert eines spitzen Winkels beträgt 3.

a) Berechne die Länge der Katheten des Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

c) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks.

d) Berechne den Inkreisradius des Dreiecks.

3.66. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks unterscheiden sich um 4 cm und der Tangenswert eines spitzen Winkels beträgt $\dfrac{3}{4}$.

a) Berechne den Umfang des Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

c) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks.

d) Berechne den Inkreisradius des Dreiecks.

3.67. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt $30\ \text{cm}^2$ und der Tangenswert eines spitzen Winkels beträgt $2{,}4$.

a) Berechne den Umfang des Dreiecks.

b) Berechne den Umkreisradius des Dreiecks.

c) Berechne den Inkreisradius des Dreiecks.

3.68. Ein Winkel in einem beliebigen Dreieck ist 30° groß und die gegenüberliegende Seite ist $4\,\text{cm}$ lang. Ein weiterer Winkel ist 45° groß.

a) Berechne den Umfang des Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

c) Berechne die Längen der Höhen.

3.69. Die Schenkel eines Dreiecks bilden mit der Basis die Winkel 30° und 45°. Die Schenkel sind zusammen 20 cm lang.

a) Wie lang sind die Schenkel des Dreiecks?

b) Wie lang ist die Höhe zur Grundseite des Dreiecks?

3.70. Einem Kreis mit dem Radius 6 cm ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben.

a) Berechne den Umfang dieses Sechsecks. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Sechsecks. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

3.71. Einem Kreis mit dem Radius 4 cm ist ein reguläres Achteck einbeschrieben.

a) Berechne den Flächeninhalt dieses Achtecks. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

b) Berechne den Umfang dieses Achtecks. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

Nimm für $\sin\left(\frac{45^{\circ}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ an.

3.72. Einem Kreis mit dem Radius 6 cm ist ein regelmäßiges 24-Eck einbeschrieben.

a) Berechne den Flächeninhalt des regelmäßigen 24-Ecks. Gib das Ergebnis als genauen Wert an. Nimm für $\sin 15^{\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ an.

b) Berechne die prozentuale Abweichung dieses Flächeninhalts vom Flächeninhalt des Kreises.

3.73. Gegeben ist eine Raute mit dem spitzen Winkel 45° und mit der Höhe $10\ \text{cm}$.

a) Berechne den Umfang der Raute.

b) Berechne den Flächeninhalt der Raute.

c) Berechne den Tangenswert des Winkels, den die kürzere Diagonale mit der Seite bildet.

3.74. Die Seiten eines Parallelogramms sind $8\ \text{cm}$ und $2\sqrt{3}\ \text{cm}$ lang und der spitze Winkel ist 30° groß.

a) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

b) Berechne die Länge der Diagonalen. Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

3.75. Die Seiten eines Parallelogramms sind 8 cm bzw. 10 cm lang und bilden einen Winkel von 60°.

a) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

b) Berechne die Länge der Diagonalen.

Gib das Ergebnis als genauen Wert an.

3.76. Die Höhe eines Parallelogramms vom stumpfen Winkel aus zerlegt die Grundseite in eine 2 cm bzw. 6 cm lange Strecke in der Reihenfolge vom spitzen Winkel ausgehend, der 60° beträgt.

a) Berechne den Umfang des Parallelogramms.

b) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

c) Berechne die Länge der Diagonalen.

3.77. In einem Parallelogramm ist der spitze Winkel 45° groß. Der Schnittpunkt der Diagonalen hat einen Seitenabstand von 2 cm bzw. $2\sqrt{2}\,\text{cm}$.

a) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

b) Berechne den Umfang des Parallelogramms.

c) Berechne die Länge der Diagonalen.

3.78. Der spitze Winkel eines Parallelogramms beträgt 60°. Die kürzere Diagonale des Parallelogramms ist 3 cm lang und bildet mit einer Seite einen Winkel von 30°.

a) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

b) Berechne den Umfang des Parallelogramms.

3.79. Einem Trapez ist ein Kreis mit dem Radius 3 cm einbeschrieben. Die Schenkel bilden mit der längeren Grundseite Winkel von 60° und 45°.

a) Berechne den Umfang des Trapezes.

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes.

3.80. Die Grundseiten eines Trapezes sind 5 cm und 11 cm lang. Die Schenkel bilden mit der längeren Grundseite Winkel von 30° und 45°.

a) Berechne die Länge der Höhe.

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes.

c) Berechne den Umfang des Trapezes.

3.81. Die kürzere Grundseite eines gleichschenkligen Trapezes ist 6 cm lang. Der Inkreisradius beträgt $2\sqrt{6}$ cm .

a) Wie lang ist die längere Grundseite?

b) Wie groß ist die Fläche des Trapezes?

c) Wie lang sind die Schenkel und wie groß ist der Umfang des Trapezes?

3.82. Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt $44\ cm^2$ und die Grundseiten sind 16 cm bzw. 6 cm lang. Die Schenkel bilden mit der längeren Grundseite Winkel, deren Summe 90° beträgt.

a) Wie lang sind die Schenkel?

b) Wie groß ist der Umfang des Trapezes?

3.83. Einem Trapez ist ein Kreis einbeschrieben. Einem anderen Kreis ist dieses Trapez einbeschrieben. Die Grundseiten des Trapezes sind 12 cm und 8 cm lang.

a) Wie groß ist der Inkreisradius?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

c) Wie groß ist der Umkreisradius?

3.84. Der Fußpunkt eines Vermessungsgerätes befindet sich 50 m von einem Turm entfernt. Der Landvermesser hat den Erhebungswinkel 60° gemessen.

Wie hoch ist der Turm, wenn dieses Gerät 1,5 m hoch ist?

Gib das Ergebnis als genauen Wert an und runde auf 2 Dezimalstellen.

3.85. Der Hobbygeometer befindet sich auf einem Kirchturm mit der Höhe 20 m. Er sieht die Spitze eines Hochhauses unter dem Erhebungswinkel 60° und den Fußpunkt unter dem Senkungswinkel 30° .

a) Berechne die Entfernung des Hochhauses vom Kirchturm.

b) Berechne die Höhe des Hochhauses.

Gib das Ergebnis als genauen Wert an und runde auf 2 Dezimalstellen.

3.86. Der Hobbygeodät sieht die Spitze eines Schlossturmes unter einem Erhebungswinkel von 30° . Wenn er sich dem Turm um weitere 20 m nähert, sieht er ihn unter einem Winkel von 45° .

a) Berechne die Höhe des Schlossturmes.

b) Berechne die ursprüngliche Entfernung des Hobbygeodäten vom Turm.

Gib das Ergebnis als genauen Wert an und runde auf 2 Dezimalstellen.

Analytische Geometrie

- **Strecke**

Die Länge einer Strecke mit den Endpunkten $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ ist:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes S_{AB} der Strecke AB sind:

$$S_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

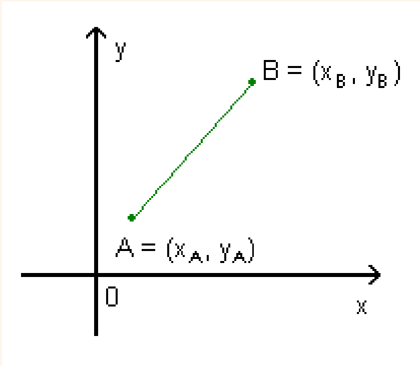


Bild 4.1

- **Gerade**

Normalform einer Geradengleichung : $y = ax + b$.

Dabei ist a die Steigung der Geraden und b der y-Achsenabschnitt.

Die **Steigung** m ist der Tangens des **Neigungswinkels** (Steigungswinkels) α gegenüber der positiven x-Achse:

$$a = \tan \alpha.$$

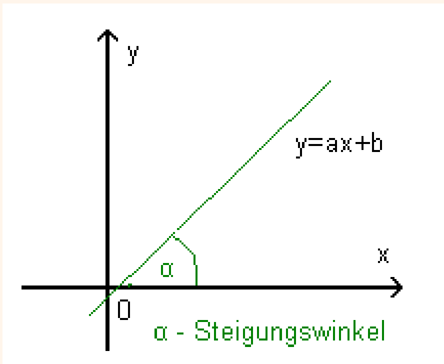


Bild 4.2

Allgemeine Form einer Geradengleichung: $Ax + By + C = 0$

Zwei-Punkte-Form einer Geradengleichung - Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \qquad (x_1 \neq x_2)$$

Verlaufen zwei Geraden $y = a_1 x + b_1$ und $y = a_2 x + b_2$ **parallel**, so gilt für die Steigungen: $a_1 = a_2$.

Stehen zwei Geraden $y = a_1 x + b_1$ und $y = a_2 x + b_2$ **senkrecht** aufeinander, so gilt für die Steigungen: $a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$ oder $a_1 \cdot a_2 = -1$.

- **Geradenbüschel**

  Geraden, die alle einen identischen, gemeinsamen Punkt haben, gehören einem Geradenbüschel an.

  Die einzelnen Geraden nennt man **Büschelgeraden**.

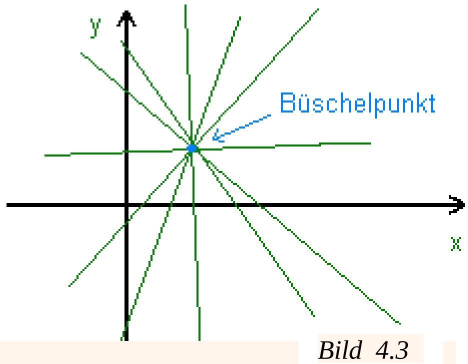


Bild 4.3

- **Dreieck**

Den Flächeninhalt des Dreiecks $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ berechnen wir mit der Formel:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

- **Kreis**

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $S = (a, b)$, dem Kreisrandpunkt $P = (x, y)$ und dem Radius r wird durch die Gleichung beschrieben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

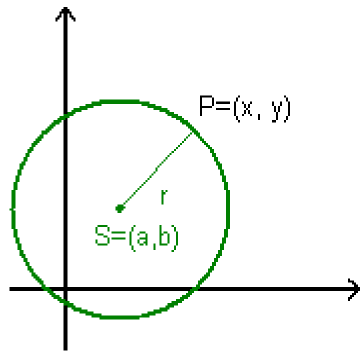


Bild 4.4

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die allgemeine Form einer Geradengleichung - . . . .

das Dreieck - . . . .

gleichschenkliges Dreieck - . . . .

gleichseitiges Dreieck - . . . .

rechtwinkliges Dreieck - . . . .

die Geradengleichung - . . . .

der Kreisrandpunkt - . . . .

das Lot - . . . .

der Lotfußpunkt - . . . .

die Normalform einer Geradengleichung - . . . .

der Neigungswinkel - . . . .

die Orthogonale - . . . .

die Parallele - . . . .

die Sehne - . . . .

die Senkrechte - . . . .

der Steigungswinkel - . . . .

Punkte, Strecken und Geraden

4.1. Zeichne die Menge aller Punkte $S = (x, -2x + 1)$ in ein Koordinatensystem.

4.2. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P = (1, -3)$ und hat eine Nullstelle bei x = 4.

a) Erstelle den Funktionsterm von g.

b) Berechne den Neigungswinkel α gegen die x-Achse.

c) $A = (4, y)$ soll unterhalb von g liegen. Welche Bedingung muss y erfüllen?

4.3. S_{AB} ist der Mittelpunkt der Strecke AB. Bestimme die fehlenden Koordinaten:

a) $A = (-2, -4)$, $B = (4, 8)$, $S_{AB} = (x, y)$, **b)** $A = (x, y)$, $B = (9, 7)$, $S_{AB} = (3, 5)$.

4.4. Ermittle die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P = (6, 3)$ und die Mitte der Strecke AB mit $A = (5, 8)$ und $B = (11, 6)$ geht.

4.5. Welche Punkte auf den Koordinatenachsen haben von P den Abstand d?

a) $P = (3, 3)$, $d = 3$, **b)** $P = (2{,}5; 2)$, $d = 2{,}5$, **c)** $P = (4, 4)$, $d = 6$.

4.6. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (1, 2)$ und $B = (-7, 5)$ gegeben. Für welchen m - Wert liegt der Punkt $P = (-1, m)$ auf der Geraden durch A und B?

4.7. Ermittle die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $A = (-2, -3)$ und $B = (x_B, y_B)$ geht, wobei B der Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen $x + 2y - 2 = 0$ und $y = 2x - 9$ ist.

4.8. Gegeben ist eine Gerade mit dem Steigungswinkel $\alpha = 60^\circ$, die durch den Punkt $B = (3, -2)$ geht. Zeige rechnerisch, dass der Punkt $A = (4, \sqrt{3} - 2)$ auf der Geraden liegt. Berechne den Abstand zwischen den Punkten A und B.

4.9. Wie heißt die Gleichung der zu $y = -2x + 3{,}5$ parallelen Geraden durch den Punkt $P = (5, 1)$?

4.10. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch (2, 3) geht und auf der Geraden mit $y = \frac{2}{3}x - 2$ senkrecht steht?

4.11. Gegeben ist die Gerade h: $x - 2y + 2 = 0$. Im Punkt $A = (3, y) \in h$ wird das Lot zu h errichtet. Welche Gleichung hat es?

4.12. Gegeben ist die Gerade g mit $y + 4(x - 0{,}5) + 1 = 0$. Bestimme die auf der Geraden g senkrecht stehende Gerade k, für die gilt: Der Schnittpunkt beider Geraden soll auf der x-Achse liegen. Gib die Geradengleichung von k an.

4.13. Für welche a-Werte steht die Gerade g_1: $y = ax - 1$ auf der Geraden g_2: $y = \frac{1}{a^2}x + 2$ senkrecht?

4.14. Bestimme die Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit $A = (-1, 5)$ und $B = (3, 4)$.

4.15. Prüfe, ob der Abstand des Punktes $P = (-3, 10)$ von der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit den Endpunkten $A = (-3, 7)$ und $B = (1, 11)$, größer als 1 ist.

4.16. Für welchen p - Wert liegt der Schnittpunkt der Geraden l: $y = 2x + 4$ und k: $y = x - p$ im zweiten Quadranten?

4.17. Für welchen minimalen k - Wert liegt der Punkt $K = (k^2, 2k)$ auf der Geraden, die parallel zur Geraden $y = -3x + 8$ ist und durch den Punkt $P = (5, 3)$ geht?

4.18. Gegeben ist eine Gerade mit $y = mx + 3$.

a) Durch welchen Punkt verlaufen alle Geraden des Geradenbüschels $y = mx + 3$?

b) Für welche Werte von m erhält man die Gleichungen der Büschelgeraden, die durch den Punkt $A = (1, 3)$ verlaufen?

4.19. Ermittle auf der x - Achse einen Punkt P , dessen Abstand von dem Punkt $R = (3, 5)$ gleich 7 ist.

4.20. Berechne den Abstand des Punktes $A = (0, 7)$ von der Geraden $x + y + 3 = 0$.

4.21. Berechne den Abstand der Geraden l_1: $2x + 3y - 4 = 0$ und l_2: $2x + 3y + 5 = 0$.

4.22. Ein Punkt bewegt sich im Koordinatensystem vom Punkt $A = (-3, 3)$ zum Punkt $B = (3, 5)$ auf einer geraden Linie. Ermittle:

a) den Steigungsfaktor dieser Linie,

b) die Länge der Strecke, die der Punkt zurücklegt.

4.23. Für welche k-Werte liegen die Punkte $A = (-2k^2 - 1, -3)$, $B = (1, 5)$ und $C = (-2, -1)$ auf einer Geraden?

4.24. Für welche m - Werte gehört der Schnittpunkt der Geraden k: $x + 2y + 3m + 1 = 0$ und l: $2x - y + m = 0$ zu der Menge $\{(x, y): x \in (0, 2) \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$?

4.25. Durch die Punkte $(-1, 2)$ und $(-a, 3a + 2)$ verläuft die Gerade k. Für welche Werte von a ist der Steigungswinkel der Geraden k gleich 60°?

4.26. Berechne die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke, wenn die Punkte $K = (3, 4)$ und $L = (5, 3)$ diese Strecke in drei gleich lange Abschnitte teilen.

4.27. Ermittle die Koordinaten des Punktes C, der auf der Strecke AB liegt und für den gilt: $|AC| : |CB| = m : n$, wenn $A = (-2, -3)$, $B = (7, 0)$, $m = 1$, $n = 2$.

Dreiecke

4.28. Berechne für das Dreieck *ABC* die Seitenlängen sowie die Koordinaten der Seitenmitten: $A = (0, 0)$, $B = (0, 7)$, $C = (3, 4)$.

4.29. Bestimme die Gleichung der Geraden, die das Lot von dem Punkt C auf die Seite *AB* des Dreiecks enthält, wenn $C = (3, 6)$, $A = (2, 1)$ und $B = (5, 6)$ gilt. Berechne die Koordinaten des Lotfußpunktes (*Bild 4.5.*).

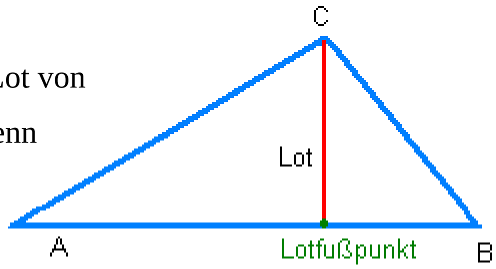


Bild 4.5.

4.30. Prüfe, ob das Dreieck *ABC* mit $A = (-3, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 6)$ gleichschenklig ist. Berechne die Länge der Höhe *CD*.

4.31. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (2, -3)$, $B = (6, 1)$ und $C = (-4, 3)$ gegeben. Zeige durch Rechnung, dass:

a) die Punkte ein Dreieck bilden, **b)** bei A ein rechter Winkel vorliegt.

4.32. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (1, 4)$, $B = (2, 1)$ und $C = (3, 6)$ gegeben. Berechne:

a) die Länge der Höhe *CD*, **b)** den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

4.33. Die Seiten eines Dreiecks sind in den Geraden $x + y - 10 = 0$, $x - y = 0$ und $x - 2y - 1 = 0$ enthalten.

a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

c) Ermittle die Gleichung der Geraden, die die längste Höhe enthält.

4.34. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (-2, -4)$, $B = (4, 2)$, $C = (-1, -1)$ gegeben. Ermittle die Gleichung:

a) der Parallelen zur Seite *AB*, die durch den Punkt *C* geht,

b) der Parallelen zur Seite *AC*, die durch die Mitte der Seite *AB* geht.

4.35. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Endpunkte der Hypotenuse $A = (-1, 2)$ und $B = (9, 1)$ gegeben. Berechne die Koordinaten des Eckpunktes *C*, der auf der Geraden $y = -2$ liegt.

4.36. Die Geraden $4x - 3y + 12 = 0$ und $3y - x + 6 = 0$ schneiden die x - Achse in den Punkten *A* und *B*. Die Geraden schneiden sich im Punkt *C*. Berechne den Umfang des Dreiecks *ABC*.

4.37. Ermittle auf der y - Achse einen Punkt *P*, der den gleichen Abstand von den Punkten $A = (-2, -2)$ und $B = (-4, 4)$ hat. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks *ABP*.

4.38. Zeige rechnerisch, dass der Schnittpunkt *W* der Geraden $x - 4y + 24 = 0$ und $x + y - 11 = 0$ zu dem Graphen der Funktion $y = x^2 - 9$ gehört. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks *ABW*, wobei *A* und *B* Schnittpunkte der Parabel mit der x - Achse sind. Zeige, dass das Dreieck *ABW* nicht rechtwinklig ist.

Vierecke

4.39. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Eckpunkten $A = (0, 0)$, $B = (3, 6)$, $C = (7, 6)$, $D = (4, 0)$.

4.40. Der Punkt $P = (4, 2)$ ist Eckpunkt eines Parallelogramms. Eine Seite des Parallelogramms liegt auf der Geraden $y = -x$, die zweite Seite liegt auf der Geraden $y = 2x - 12$. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

4.41. Die Seiten eines Parallelogramms liegen auf den Geraden $y = 2$ und $2x - y - 14 = 0$. Seine Diagonalen schneiden sich im Punkt $D = (3, -1)$. Berechne:

a) die Gleichungen der Geraden, die die anderen Seiten enthalten,

b) die Eckpunkte des Parallelogramms.

4.42. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (3, 1)$, $B = (7, 2)$, $C = (8, 6)$ gegeben. Berechne den Flächeninhalt der Raute *ABCD*.

4.43. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (2, 3)$, $B = (5, 6)$, $C = (2, 9)$, $D = (-1, 6)$ gegeben. Berechne die Länge der Diagonalen, wenn sich der Flächeninhalt des Quadrats *ABCD* um 36% vermindert.

4.44. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = (3, -4)$, $B = (5, 0)$, $C = (1, 2)$, $D = (-1, -2)$ gegeben. Zeige, dass das Viereck *ABCD* ein Quadrat ist.

Kreis

Beispiel 4.1.

Bestimmung von Mittelpunkt und Radius eines Kreises:

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Kreises mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - \; = 0.$$

<u>*Lösung:*</u>

Die Gleichung des Kreises ist in die Form $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ zu bringen.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Der Mittelpunkt des Kreises ist $S = (2, -1)$ und der Radius $r = 3$.

4.45. Bestimme jeweils den Mittelpunkt und den Radius der Kreise:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$, **b)** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$, **c)** $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

4.46. Untersuche, ob durch folgende Gleichungen jeweils ein Kreis beschrieben wird, und wenn ja, bestimme den Mittelpunkt und den Radius:

a) $x^2 + y^2 - 2y + 4 = 0$, **b)** $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 11 = 0$, **c)** $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$.

4.47. Der Kreis k hat den Mittelpunkt *S* und geht durch den Punkt *P*. Bestimme den Radius des Kreises und stelle eine Kreisgleichung auf:

a) $S = (0, 0)$, $P = (-2, 4)$, **b)** $S = (-2, 1)$, $P = (2, 4)$, **c)** $S = (0, 5)$, $P = (0, 0)$.

4.48. Bestimme einen Kreis, der

a) beide Koordinatenachsen berührt und durch den Punkt $A = (2, 1)$ geht,

b) die x – Achse berührt und durch die Punkte $B = (-3, 2)$ und $C = (1, 2)$ geht,

c) das Koordinatensystem im Ursprung berührt und durch den Punkt $D = (2, 1)$ geht.

4.49. Gegeben sind zwei Kreise mit: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$ und $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$.
Die Kreise schneiden sich in den Punkten $A = (-1, 1)$ und $B = (x, y)$.
Berechne den Flächeninhalt des Vierecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Kreise und ihre Schnittpunkte sind.

Ähnliche Figuren

Unterscheiden sich zwei Figuren nur in der Größe, aber nicht in der Form, dann nennt man diese Figuren **ähnlich**.

Zwei **Dreiecke** sind bereits **ähnlich**, wenn sie

(1) in zwei Winkelgrößen übereinstimmen. (Ähnlichkeitssatz WW)

(2) im Längenverhältnis der drei Seiten übereinstimmen. (Ähnlichkeitssatz SSS)

(3) im Längenverhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.(Ähnlichkeitssatz SWS)

In ähnlichen Dreiecken stehen zwei entsprechende Höhen im gleichen Verhältnis wie zwei entsprechende Seiten. (*Bild 4.6*)

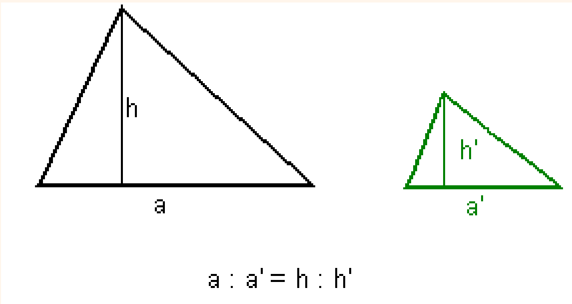


Bild 4.6

Zwei **rechtwinklige Dreiecke** sind **ähnlich**, wenn sie:

(1) im Längenverhältnis der Katheten übereinstimmen.

(2) in einem spitzen Winkel übereinstimmen.

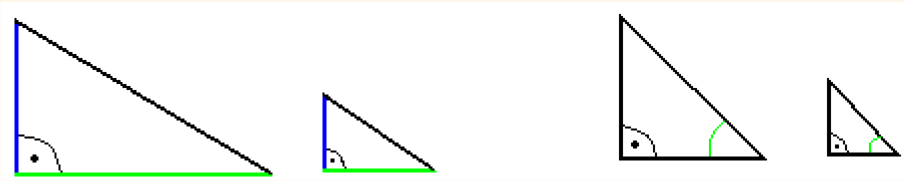


Bild 4.7

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe auf dex Hypotenuse das Dreieck in zwei ähnliche Teildreiecke. (*Bild 4.8*)

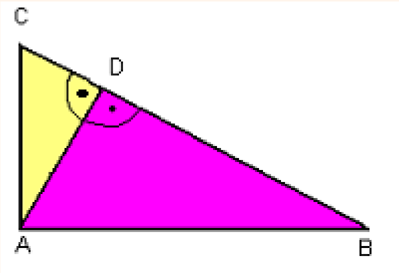


Bild 4.8

Die Dreiecke *ABC*, *ABD* und *ACD* sind ähnlich.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

ähnlich - . . . .

die Ähnlichkeit - . . . .

der Ähnlichkeitsmaßstab - . . . .

das Längenverhältnis - . . . .

der Maßstab - . . . .

Beispiel für ähnliche Figuren

Bild 4.9

4.50. Ergänze die Sätze mit den Wörtern aus der Tabelle:

Winkel · Ähnlichkeitsmaßstab · Längenverhältnis · Flächeninhalt · ähnlichen

In . . . . Figuren haben entsprechende . . . .
die gleiche Weite, entsprechende Strecken das gleiche . . . .
Sind Vielecke A und B ähnlich, und sind die Seiten von A k-mal so lang wie die Seiten von B, so:

- sagt man A ist zu B ähnlich mit dem . . . . k;
- ist der . . . . von A k^2-mal so groß wie der Flächeninhalt von B.

Beispiel 4.2

Das Viereck *A* ist zu *B* ähnlich mit dem Maßstab 1,5; entsprechende Winkel sind gleich groß, und es ist

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = 1{,}5 \quad \text{und} \quad \frac{P_A}{P_B} = 2{,}25.$$

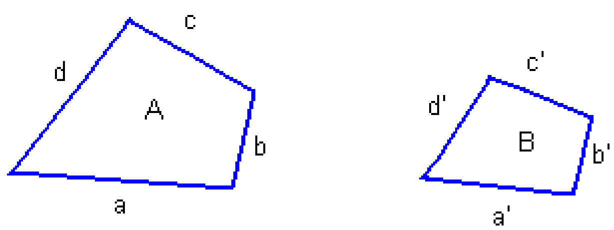


Bild 4.10

4.51. Welche Figuren sind immer zueinander ähnlich?

a) zwei gleichschenklige Dreiecke, **b)** zwei rechtwinklig - gleichschenklige Dreiecke,

c) zwei gleichseitige Dreiecke, **d)** zwei Rechtecke,

e) zwei Parallelogramme, **f)** zwei Quadrate.

4.52. Zeige rechnerisch, dass das Rechteck mit den Seiten 2,5 cm und 4 cm zu dem Rechteck mit den Seiten 7,5 und 12 ähnlich ist.

4.53. In zwei ähnlichen Vielecken entsprechen sich die Seiten $a = 9$ cm und $a' = 27$ cm. Wie groß ist der Flächeninhalt P_A des einen Vielecks, wenn $P_{A'} = 36 \text{ cm}^2$ beträgt?

4.54. Zwei ähnliche Vielecke haben die Flächeninhalte 32 cm^2 und 18 cm^2. Der Umfang des ersten Vielecks beträgt 20 cm. Berechne den Umfang des zweiten Vielecks.

4.55. Über den Seiten des Dreiecks *ABC* mit den Seitenlängen 3, 4, 6 werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet . Wie verhalten sich:

a) die Umfänge, **b)** die Höhen, **c)** die Flächeninhalte

dieser Dreiecke?

4.56. Ein rechtwinkliges Trapez wurde durch die kürzere Diagonale in zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke geteilt. Die kürzere Grundseite des Trapezes ist gleich 8 cm, der kürzere Schenkel ist 6 cm lang. Wie lang ist der zweite Schenkel des Trapezes?

4.57. Ein Parallelogramm *ABCD* ist zu dem Parallelogramm *A'B'C'D'* mit dem Ähnlichkeitsmaßstab $\frac{3}{2}$ ähnlich. Der Flächeninhalt des Parallelogramms *ABCD* beträgt 36 cm^2. Wie groß ist der Flächeninhalt des Parallelogramms *A'B'C'D'*?

4.58. Zeichnet man in ein Trapez die beiden Diagonalen ein, so entstehen Teildreiecke. Beweise, dass zwei von ihnen ähnlich sind.

4.59. Die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes stehen senkrecht zueinander und teilen sich im Verhältnis 3 : 2. Die Diagonalen haben die Länge 20 cm. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Trapezes.

4.60. Das Verhältnis der Höhenlängen der zwei ähnlichen Trapeze ist gleich $\frac{3}{2}$. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist um 20 cm größer als der Flächeninhalt des zweiten Trapezes. Berechne die Flächeninhalte der Trapeze.

4.61. Die heute üblichen DIN-Formate für Papierbögen wurden 1922 eingeführt. Sie sind durch 3 Merkmale bestimmt:

(1) Alle Rechtecke mit DIN-Formaten sind ähnlich.

(2) Halbiert man ein Rechteck, so erhält man zwei Rechtecke des nächst kleineren DIN-Formates.

(3) Ein Rechteck mit dem DIN-Format A0 hat den Flächeninhalt 1 m^2.

a) Bestimme das Seitenverhältnis a:b eines Rechtecks mit DIN-Format.

b) Berechne Länge und Breite eines Rechtecks vom DIN-Format A0. Runde auf Vielfache von 1 mm.

c) Welche Abmessungen haben Rechtecke mit den DIN-Formaten A4 (Schreibmaschinenpapier), A5 (Schreibheft), A6 (Postkarte)?

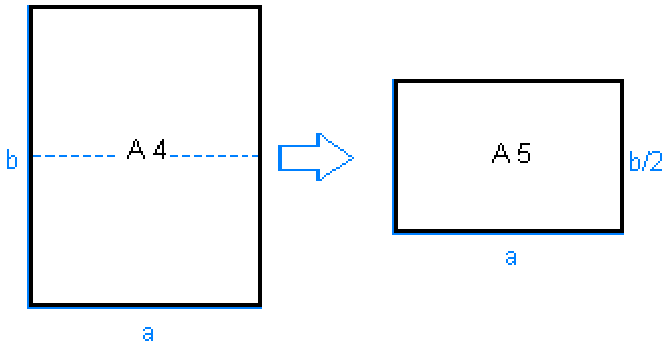


Bild 4.11

4.62. Für Fernsehbildschirme gilt: *Höhe : Breite* ist gleich 3 : 4. Die Größe des Bildschirms wird durch die Länge d der Diagonalen bestimmt. Welche Abmessungen hat der Bildschirm für $d = 68$ cm?

4.63. Aufgrund welches Ähnlichkeitssatzes sind die Dreiecke ähnlich. (Die gleiche Farbe bedeutet die gleiche Länge oder das gleiche Maß).

a)

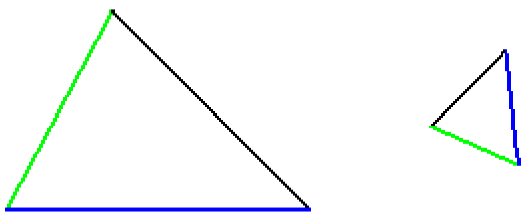


Bild 4.12

b)

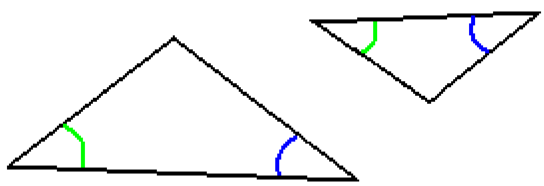


Bild 4.13

4.64. Von einem Dreieck ABC ist durch eine Parallele zu AB ein Dreieck so abzuschneiden, dass die Flächeninhalte beider im Verhältnis 16 : 9 stehen. Wie verläuft die Parallele?

4.65. Teile in einem Dreieck ABC die Seite AB im Verhältnis 1 : 3 und ziehe durch den Teilpunkt eine Parallele zu AC. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des abgeschnittenen Dreiecks zu dem ursprünglichen Dreieck ABC?

4.66. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist das Längenverhältnis der Katheten gleich $\frac{3}{5}$.

a) Die kürzere Kathete des Dreiecks FGH, das dem Dreieck ABC ähnlich ist, ist 15 cm lang. Wie lang ist die zweite Kathete des Dreiecks FGH?

b) In dem rechtwinkligen Dreieck KLM sind die Seiten 15 cm, 12 cm, 9 cm lang. Ist das Dreieck KLM zu dem Dreieck ABC ähnlich?

.

4.67. In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe auf dex Hypotenuse diese in zwei Strecken mit den Längen 3 dm und 12 dm. Berechne die Länge der Höhe auf der Hypotenuse.

4.68. Viktor hält mit ausgestrecktem Arm (65 cm) ein Streichholz (4 cm) so in der Hand, dass
es gerade einen Mast (Höhe 5 m) verdeckt. Wie viele Meter steht er vom Mast entfernt?

4.69. Der Mond ist 382 200 km von der Erde entfernt. Wenn man einen Bleistift von 7 mm Durchmesser in einer Entfernung von 78 cm vor das Auge hält, verdeckt dieser gerade den Mond. Welchen Durchmesser hat der Mond?

4.70. Die Schattenmethode (*Bild 4.14*) zur Höhenbestimmung ist uralt. Bereits *Thales von Milet* (ca. 600 v. Ch.) benutzte sie. Er verglich die Schattenlänge (51 m) einer Pyramide mit der eines Stocks (1m) der Länge 40 cm. Wie hoch ist die Pyramide?

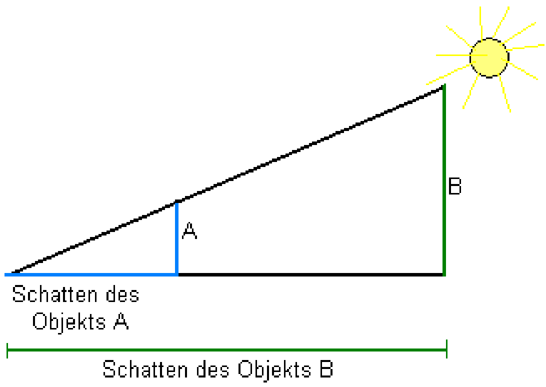


Bild 4.14

4.71. Auf einer Karte im Maßstab 1 : 50 000 nimmt ein See eine Fläche von 0,6 cm^2 ein. Berechne seine Fläche in m^2 und in ha.

Abituraufgaben

4.72. Gegeben sind die Punkte $P = (-2, 8)$ und $Q = (-4, 6)$. Ermittle:

a) den Funktionsterm einer linearen Funktion, deren Graph diese beiden Punkte enthält.

b) den Neigungswinkel der Geraden gegen die x-Achse.

c) die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

4.73. Gegeben sind die Punkte $A = (4, 0)$ und $B = (2, 8)$ sowie die Gleichung der Geraden $g\colon\ x - y + 1 = 0$.

a) Ermittle auf der Geraden g einen Punkt P, so dass $|AP| = |PB|$.

b) Stelle für den Kreis mit dem Mittelpunkt P und dem Radius AP eine Gleichung auf.

c) Zeige rechnerisch, dass das Dreieck AOB (O ist der Ursprung des Koordinatensystems) gleichschenklig ist.

4.74. Die Gerade mit der Gleichung $y = 2x + 3$ schneidet die Parabel $y = x^2 + 5x - 1$ in den Punkten A und B:

a) Berechne die Koordinaten der Punkte A und B.

b) Wie lautet die Gleichung des Kreises durch die Punkte A und B, dessen Mittelpunkt S auf der Geraden $2x - y - 2 = 0$ liegt?

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.

4.75. Die Punkte $A = (-1, -2)$, $B = (7, 2)$, $C = (1, 4)$ sind Eckpunkte eines rechtwinkligen Trapezes $ABCD$ mit den rechten Winkeln in CDA und DAB .

a) Berechne die Koordinaten des vierten Eckpunktes D des Trapezes.

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

c) Wie lang ist die Strecke, deren Endpunkte die Mittelpunkte der Grundseiten des Trapezes sind?

d) Berechne die Werte der trigonometrischen Funktionen des spitzen Winkels des Trapezes $ABCD$.

4.76. Ergänze im $\square$ Begriffe aus der Wortliste, so dass du eine wahre Aussage bekommst. Es gibt nur eine richtige Lösung.

A. ein Punkt	B. zwei Punkte	C. drei Punkte
D. ein Kreis	E. ein Dreieck	F. eine Gerade

Durch $\square$ geht genau $\square$.

4.77. Gegeben sind die Punkte $A = (2, 3)$, $B = (7, 8)$, $C = (4, 8)$ und $D = (2, 6)$.

a) Zeige, dass die Punkte ein gleichschenkligs Trapez bilden.

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes.

c) Berechne die Länge der Diagonalen.

d) Der Punkt E ist der Schnittpunkt der Diagonalen. In welchem Verhältnis ist das Dreieck *ABE* zum ΔCDE ähnlich?

4.78. Gegeben sind die Punkte: $A = (–2, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (–1, 8)$, $D = (–4, 1)$ und $E = (–2{,}5; –1)$.

a) Zeige, dass die Geraden durch die Punkte *BC* und *DE* parallel sind.

b) In welchem Verhältnis teilt der Punkt *A* die Strecke *DB*.

c) Zeige, dass die Dreiecke *ABC* und *ADE* ähnlich sind.

d) Der Flächeninhalt des Dreiecks *ADE* ist gleich $2{,}75$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

4.79. Gegeben sind zwei ähnliche Dreiecke: $\Delta\ ABC$ und ΔDEF mit $A = (–3, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 4)$, $D = (–x, 0)$, $E = (x, 0)$, $F = (0, y)$. Berechne x und y, wenn:

a) der Flächeninhalt des Dreiecks *DEF* gleich 27 ist.

b) der Umfang des Dreiecks *DEF* gleich 32 ist.

4.80. Ein gleichschenkliges Trapez *ABCD* mit den Grundseiten 4 und 8 und einem spitzen Winkel von 60° ist ähnlich zum Trapez *A'B'C'D'* mit einem Schenkel vom 12 cm.

a) Berechne den Umfang des Trapezes *ABCD*.

b) In welchem Ähnlichkeitsmaßstab ist das Trapez *ABCD* zum Trapez *A'B'C'D'* ähnlich?

c) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes *A'B'C'D'*.

4.81. Gegeben ist ein Quadrat K_1 mit der Seite 4 cm. In welchem Verhältnis sind die Quadrate K_1 und K_2 ähnlich, wenn:

a) Der Umfang des Quadrats K_2 gleich 12 cm ist.

b) Die Diagonale des Quadrats K_2 gleich 6 cm ist.

c) Der Flächeninhalt des Umfangkreises des Quadrats K_2 gleich 16π ist.

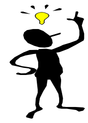
4.82. In einem Koordinatensystem ist ein Dreieck *ABC* mit $A = (0, 0)$, $B =(6, 0)$ und $C =(0, 8)$ gegeben.

a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Ermittle rechnerisch eine Gerade, die das Dreieck *ABC* in zwei ähnliche Dreiecke teilt.

c) Berechne das Maß des Winkels *ABC*.

5. Folgen



Folgen

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit der Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 als Definitionsbereich. Die Funktionswerte sind Elemente aus der Menge der reellen Zahlen.

Die einzelnen Funktionswerte heißen **Glieder der Zahlenfolge** und werden mit $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ bezeichnet.

Eine Folge lässt sich auf zwei Arten: **explizit** und **rekursiv** definieren.

rekursive Zuordnungsvorschrift	**explizite Zuordnungsvorschrift**	**aufzählende Schreibweise**
$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$	$a_n = 3n - 1$	$(a_n): 2,\ 5,\ 8,\ \ldots$
$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$	$a_n = 2^{n-1}$	$(a_n): 1,\ 2,\ 4,\ \ldots$

a_1 heiβt das **Anfangsglied**, das **1.Glied**, **erstes Folgenglied**

a_2 heiβt das **2. Glied**, **zweites Folgenglied**

a_n heiβt das ***n*-te Glied**, ***n*-tes Glied**, **allgemeines Glied**

(a_n) heißt die Folge a_n

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Folge - . . . .

die Zahlenfolge - . . . .

das Glied - . . . .

das Anfangsglied - . . . .

allgemeines Glied - . . . .

in der aufzählenden Schreibweise - . . . .

. . . .

die rekursive Darstellung (Beschreibung) - . . . .

5.1. Fülle die Lücken mit Begriffen aus der Wortliste aus.

***A.* Primzahlen** ***B.* zusammengesetzten Zahlen**

***C.* echten Brüche** ***D.* unechten Brüche** ***E.* Stammbrüche**

***F.* ungeraden Zahlen** ***G.* geraden Zahlen**

***H.* natürlichen Zahlen** ***I.* ganzen Zahlen** ***J.* rationalen Zahlen**

***K.* einstelligen Zahlen** ***L.* zweistelligen Zahlen**

***M.* Quadratzahlen** ***N.* Kubikzahlen**

a) 0, 1, 2, 3, ... Ist die Folge der ....

b) 2, 4, 6, 8, ... Ist die Folge der ....

c) 1, 3, 5, 7, ... Ist die Folge der ....

d) 2, 3, 5, 7, 11; ... Ist die Folge der ....

e) 1, 4, 9, 16, ... Ist die Folge der ....

f) 1, 8, 27, 64, ... Ist die Folge der ....

g) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ Ist die Folge der ....

(Brüche mit dem Zähler 1.)

Beispiel 5.1.

Gegeben ist die Folge (a_n) mit dem allgemeinen Glied $a_n = 3n+2$.

Gib die ersten vier Folgenglieder an.

$a_1 = 3\cdot1+2=5$ $\quad a_1$ - das erste Glied

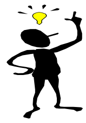
$a_2 = 3\cdot2+2=8$ $\quad a_2$ - das zweite Glied

$a_3 = 3\cdot3+2=11$ $\quad a_3$ - das dritte Glied

$a_4 = 3\cdot4+2=14$ $\quad a_4$ - das vierte Glied

5.2. Gegeben ist die Folge (a_n) mit dem allgemeinen Glied $a_n = 2n-7$. Gib die ersten fünf Folgenglieder an.

Arithmetische Folge



Eine Folge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn die **Differenz** zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist, d.h. $a_{n+1} - a_n = r$

Rekursive Darstellung der arithmetischen Folge: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$, $n \in N^+$

Explizite Darstellung der arithmetischen Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Für jeweils drei benachbarte Glieder a_{n-1}, a_n, a_{n+1} einer arithmetischen Folge gilt:

$$\boxed{2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}}$$

Jedes Glied (mit Ausnahme des Anfangsgliedes und Endgliedes) einer arithmetischen Zahlenfolge ist das **arithmetische Mittel** der beiden benachbarten Glieder.

a_{n-1}, a_n, a_{n+1} a_n - **Mittelglied** $\boxed{a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$

Aus dieser Eigenschaft stammt der Name „arithmetische Zahlenfolge“

a_1 heißt das **Anfangsglied**, das **1.Glied**, **erstes Folgenglied**

a_2 heißt das **2. Glied**, **zweites Folgenglied**

a_n heißt das ***n*-te Glied, *n*-tes Glied, allgemeines Glied**

r heißt **Differenz der arithmetischen Folge**

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die arithmetische Folge - . . . .

die Differenz der arithmetischen Folge - . . . .

das arithmetische Mittel - . . . .

das Anfangsglied - . . . .

das Endglied - . . . .

das Mittelglied - . . . .

benachbartes Glied - . . . .

Monotonie: Jede arithmetische Folge (a_n) ist:

- **streng monoton** **steigend / zunehmend / wachsend**, wenn $r > 0$
- **streng monoton** **fallend / abnehmend**, wenn $r < 0$

Die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ der Glieder einer endlichen arithmetischen Folge (a_n) heißt **arithmetische Reihe**.

Die Summe der n ersten Glieder der Folge (a_n) bezeichnet man mit S_n.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Eine endliche arithmetische Reihe berechnet man nach der Formel:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Mit derselben Formel wird auch die Summe der n ersten Glieder der arithmetischen Folge (a_n) berechnet.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Monotonie - . . . .

eine endliche arithmetische Folge - . . . .

. . . .

die Folge ist streng monoton steigend / zunehmend / wachsend - . . . .

. . . .

die Folge ist streng monoton fallend / abnehmend - . . . .

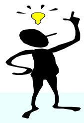
. . . .

die arithmetische Reihe - . . . .

die Summe der *n* ersten Glieder der Folge - . . . .

. . . .

Geometrische Folge



Eine Folge (a_n) heißt **geometrische Folge**, wenn **der Quotient** zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist, d.h. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ mit $a_1 \neq 0$ und $q \neq 0$.

Rekursive Darstellung der geometrischen Folge: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}, \quad n \in N^+$

Explizite Darstellung der geometrischen Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Für jeweils drei benachbarte Glieder a_{n-1}, a_n, a_{n+1} einer geometrischen Folge gilt:

$$\boxed{a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Jedes Glied (mit Ausnahme des Anfangsgliedes und Endgliedes) einer geometrischen Zahlenfolge ist das **geometrische Mittel** der beiden benachbarten Glieder.
Diese Eigenschaft gilt aber nur für positive Glieder der geometrischen Zahlenfolge.

a_{n-1}, a_n, a_{n+1} $\qquad a_n$ - **Mittelglied**

für $a_{n-1} > 0$, $a_n > 0$, $a_{n+1} > 0$

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}}$$

Aus dieser Eigenschaft stammt der Name „geometrische Zahlenfolge“

a_1 heißt das **Anfangsglied**, das **1.Glied**, **erstes Folgenglied**

a_2 heißt das **2. Glied**, **zweites Folgenglied**

a_n heißt das ***n*-te Glied, *n*-tes Glied, allgemeines Glied**

q heißt **Quotient der geometrischen Folge**

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die geometrische Folge - . . . .

der Quotient der geometrischen Folge - . . . .

der Quotient ist konstant - . . . .

das geometrische Mittel- . . . .

das Mittelglied - . . . .

Monotonie: Jede geometrische Folge (a_n) ist:

- **streng monoton** **steigend / zunehmend / wachsend** für: $\begin{cases} a_1 > 0 \\ q > 1 \end{cases}$ oder $\begin{cases} a_1 < 0 \\ q \in (0;1) \end{cases}$
- **streng monoton** **fallend / abnehmend** für: $\begin{cases} a_1 > 0 \\ q \in (0;1) \end{cases}$ oder $\begin{cases} a_1 < 0 \\ q > 1 \end{cases}$
- **alternierend** für: $q < 0$ und $a_1 \neq 0$

Die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ der Glieder einer endlichen geometrischen Folge (a_n) heißt **geometrische Reihe**.

Die Summe der n ersten Glieder der Folge (a_n) bezeichnet man mit S_n.

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ $\qquad$ $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1}$

Eine endliche geometrische Reihe berechnet man nach der Formel:

$$\boxed{S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{für } q = 1 \end{cases}}$$

Mit derselben Formel wird auch die Summe der n ersten Glieder der geometrischen Folge (a_n) berechnet.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Monotonie - . . . .

die Folge ist streng monoton steigend / zunehmend / wachsend - . . . .

. . . .

die Folge ist streng monoton fallend / abnehmend - . . . .

. . . .

die alternierende Folge - . . . .

die geometrische Reihe - . . . .

die Summe der *n* ersten Glieder der Folge - . . . .

. . . .

5.3. Richtig oder falsch?

		R	F
a	Der Graph einer arithmetischen Folge besteht aus Punkten, die auf einer Geraden liegen.		
b	Wenn die Differenz einer arithmetischen Folge positiv ist, dann ist die Folge monoton wachsend.		
c	Wenn die Differenz einer arithmetischen Folge negativ ist, dann ist die Folge monoton fallend.		
d	Wenn der Quotient einer geometrischen Folge negativ ist, dann ist die Folge monoton fallend.		
e	Wenn der Quotient einer geometrischen Folge negativ ist, dann ist die Folge alternierend.		

5.4. Ergänze die Lücken mit den Begriffen aus der Wortliste.

***A.* Anfangsglied** ***B.* Endglied** ***C.* Glieder**

***D.* die Differenz** ***E.* das Produkt** ***F.* der Quotient** ***G.* die Summe**

***H.* natürlichen Zahlen** ***I.* ganzen Zahlen** ***J.* reellen Zahlen**

***K.* Wertebereich** ***L.* Definitionsbereich**

***M.* Kurve** ***N.* Gerade** ***O.* Punktmenge**

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion mit der Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 als

(1) . . . . Die Funktionswerte sind Elemente aus

der Menge der **(2)** . . . .

Die einzelnen Elemente einer Folge heißen **(3)** . . . .

Das erste Glied einer Folge heißt **(4)** . . . .

Das letzte Glied einer endlichen Folge heißt **(5)** . . . .

Der Graph einer Folge ist eine **(6)** . . . .

Bei arithmetischen Folgen ist **(7)** . . . . zweier

benachbarter Glieder konstant. Bei geometrischen Folgen ist

(8) . . . . zweier benachbarter Glieder konstant.

5.5. Trage die unten stehenden Begriffe an den richtigen Stellen ein.

***A.* arithmetische Folge**   ***B.* geometrische Folge**

***C.* zunehmende Folge**   ***D.* abnehmende Folge**

***E.* alternierende Folge**   ***F.* konstante Folge**

***G.* die Differenz**   ***H.* der Quotient**

***I.* das Anfangsglied**   ***J.* das Endglied**   ***K.* das Mittelglied**

***K.* wechselnden Vorzeichen**

a) 2, 5, 8, … Es handelt sich um eine ....

.... beträgt 2 und

.... beträgt 3.

b) 1, 3, 9, … Es handelt sich um eine ....

.... beträgt 1 und

.... beträgt 3.

c) 7, 7, 7, … Es handelt sich um eine ....

d) 1, −1, 1, ... Es handelt sich um eine .... mit

....

.... beträgt 1 und

.... beträgt −1.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

mit wechselnden Vorzeichen - ....

....

das Vorzeichen - ....

die konstante Folge - ....

5.6. Ergänze in $\square$ Begriffe aus der Wortliste, so dass eine wahre Aussage entsteht.

Es gibt jeweils nur eine richtige Lösung.

a) Eine Zahlenfolge ist eine Funktion

mit der Menge $\square$ als Definitionsbereich

- ***A*** reeller Zahlen
- ***B*** natürlicher Zahlen
- ***C*** gerader Zahlen
- ***D*** natürlicher positiver Zahlen

und mit der Menge $\square$ als Wertebereich.

- ***A*** reeller Zahlen
- ***B*** natürlicher Zahlen
- ***C*** gerader Zahlen
- ***D*** natürlicher positiver Zahlen

b) Der Graph einer Folge ist $\square$.

- ***A*** eine Gerade
- ***B*** eine Kurve
- ***C*** eine Punktmenge
- ***D*** eine Parabel

c) Jedes Glied einer arithmetischen Zahlenfolge (mit Ausnahme des Anfangsgliedes und des Endgliedes) ist $\square$ der beiden benachbarten Glieder.

- ***A*** der Durchschnitt
- ***B*** der arithmetische Durchschnitt
- ***C*** das geometrische Mittel
- ***D*** das arithmetische Mittel

d) Jedes Glied einer geometrischen Zahlenfolge (mit Ausnahme des Anfangsgliedes und des Endgliedes) ist $\square$ der beiden benachbarten Glieder.

- ***A*** der Durchschnitt
- ***B*** der geometrische Durchschnitt
- ***C*** das geometrische Mittel
- ***D*** das arithmetische Mittel

Arithmetische Folgen - Aufgaben

5.7. Die Entwicklung eines Films kostet 1,50 € und zusätzlich jedes Papierbild 0,20 €.

a) Berechne den Preis für die Bearbeitung eines Films mit 20 Aufnahmen.

b) Berechne den Preis für die Bearbeitung eines Films mit 36 Aufnahmen.

c) Berechne den Preis für die Bearbeitung eines Films mit x Aufnahmen.

5.8. Gegeben ist eine arithmetische Folge (a_n). Das 2. Glied ist 14 und das 3. Glied ist 20.

a) Bestimme das Anfangsglied und die konstante Differenz.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Gib das 10. Glied an.

5.9. Gegeben ist eine arithmetische Folge (a_n). Das 4. Glied ist 3 und das 8. Glied ist 4.

a) Bestimme das Anfangsglied und die konstante Differenz.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Gib das 12. Glied an.

5.10. Der Preis einer Zeitungsanzeige setzt sich aus dem Preis je Zeile sowie einem Grundpreis zusammen. Eine 7-zeilige Anzeige kostet 70 € und eine 13-zeilige Anzeige 100 €.

a) Bestimme den Preis einer 10-zeiligen Anzeige.

b) Bestimme den Preis einer n-zeiligen Anzeige.

5.11. Die monatliche Telefonrechnung setzt sich zusammen aus einer Grundgebühr von 10,00 € und einer weiteren Gebühr von 0,03 € für jede verbrauchte Einheit.

a) Wie hoch ist die Telefonrechnung bei 10 Gebühreneinheiten?

b) Wie hoch ist die Telefonrechnung bei n Gebühreneinheiten?

5.12. Zwischen den Zahlen 7 und -1 sind drei Glieder einzufügen, so dass eine arithmetische Folge entsteht. Wie heißen diese drei Glieder dieser Folge?

5.13. Zwischen den Zahlen 5 und -3 sind drei Glieder einzufügen, so dass eine arithmetische Zahlenfolge entsteht. Wie heißen diese drei Glieder dieser Zahlenfolge?

5.14. Ein Taxi-Unternehmen berechnet als Grundpreis 4,00 € und je angefangenen Kilometer 1,00 €.

a) Wie viel kostet eine Fahrt von 10 km Länge?

b) Wie viel kostet eine Fahrt von 13,4 km Länge?

5.15. Das Anfangsglied einer arithmetischen Folge ist 7, die Anzahl der Glieder ist 6 und die Differenz beträgt 3.

a) Wie groß ist der Wert des Endgliedes?

b) Wie groß ist der Summenwert aller Glieder?

5.16. Das Anfangsglied einer arithmetischen Zahlenfolge ist 20, das 2.Glied ist 16 und das letzte -12.

a) Berechne die Anzahl der Glieder dieser Folge.

b) Berechne ihren Summenwert.

5.17. Gegeben ist eine arithmetische Folge. Das 3. Glied ist 6 und das 6. Glied ist 18.

a) Bestimme das Anfangsglied und die konstante Differenz.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Gib das 7. Glied an.

d) Berechne die Summe der ersten 7 Glieder dieser Folge.

5.18. Gegeben ist eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = n^2 - 7n + 10$.

a) Ist die Zahl 40 ein Glied dieser Folge? Begründe rechnerisch.

b) Berechne die Anzahl der negativen Glieder dieser Folge.

c) Berechne wie viele Glieder kleiner als 10 sind?

5.19. Eine endliche arithmetische Folge enthält alle natürlichen zweistelligen Zahlen.

a) Wie viele Glieder enthält die Folge?

b) Wie groß ist der Summenwert aller Glieder?

5.20. Berechne die Summe aller geraden zweistelligen Zahlen.

5.21. Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen zwischen 10 und 100?

5.22. Wie groß ist die Summe aller zweistelligen Zahlen, die durch 8 teilbar sind?

5.23. Wie viele zweistellige Zahlen sind durch 12 teilbar? Berechne ihren Summenwert.

5.24. Berechne die Summe der Vielfachen der Zahl 7 von 7 bis 140.

5.25. Wie viele durch 3 teilbare Zahlen liegen zwischen 1 und 100? Berechne ihren Summenwert.

5.26. Wie groß ist die Summe aller durch 9 teilbaren Zahlen zwischen 100 und 200?

5.27. Eine Uhr schlägt zu den vollen Stunden. Wie viele Schläge macht sie im Verlauf von 24 Stunden?

5.28. In einem Stadion befinden sich in der 1. Reihe 30 Sitzplätze.
Jede folgende Reihe enthält 3 Sitzplätze mehr als die vorhergehende.

a) Bestimme die Anzahl der Sitzplätze in der 8. Reihe.

b) Bestimme die Anzahl der Sitzplätze in den ersten 8 Reihen.

5.29. Auf dem trapezförmigen Teil eines Daches befinden sich 16 Reihen Dachziegel.
Die oberste Reihe enthält 24 Dachziegel. Jede weitere Reihe hat 2 Ziegel mehr.

a) Wie viele Dachziegel sind in der 16. Reihe?

b) Wie viele Dachziegel befinden sich auf dem Dach?

5.30. Die trapezförmige Fläche eines Daches enthält in der obersten Reihe 32 Ziegel, in jeder folgenden einen Ziegel mehr. Insgesamt sind es 12 Reihen.
Wie viele Ziegel liegen auf dem Dach?

5.31. In einem Freilichttheater hat die erste Sitzreihe 25 Plätze. Jede weitere Reihe hat 2 Plätze mehr als die vorhergehende. Das Theater umfasst 20 Reihen.

a) Wie viele Plätze sind in der 20. Reihe?

b) Wie viele Plätze hat das Theater?

5.32. Ein Freilichttheater hat insgesamt 18 Sitzreihen. In der untersten Reihe befinden sich 29 Sitzplätze, in der obersten Reihe 80. Die Anzahl der Sitzplätze nimmt von Reihe zu Reihe um den gleichen Betrag zu.

a) Wie viele Sitzplätze gibt es in dem Theater?

b) Wie viele Plätze sind in der 16. Reihe?

Geometrische Folgen - Aufgaben

5.33. Das Anfangsglied einer geometrischen Zahlenfolge ist 3. Der Quotient dieser Folge hat den Wert 2.

a) Berechne das sechste Glied dieser Folge.

b) Gib das allgemeine Glied dieser Folge an.

5.34. Ein Forscher züchtet auf einem Nährboden Bakterien, die sich jede Stunde teilen. Zum Anfang befinden sich drei Bakterien auf dem Nährboden.

a) Berechne die Anzahl der Bakterien nach 3 Stunden.

b) Berechne die Anzahl der Bakterien nach 12 Stunden.

c) Berechne die Anzahl der Bakterien nach *n* Stunden.

5.35. Eine Algensorte verdoppelt sich täglich. Der Algenteppich ist zu Beginn des Beobachtungszeitraumes $60\ \text{cm}^2$ groß und am Ende um $900\ \text{cm}^2$ größer. Wie lange wurde beobachtet?

5.36. Ein großes Blatt Papier mit der Dicke 0,1 mm wird 15-mal nacheinander gefaltet.

a) Wie dick ist der entstehende Papierpacken?

b) Schreibe die Formel für die Dicke des entstehenden Papierpackens nach *n*-mal Falten auf?

5.37. Bei einem Glücksspiel kann man den dreifachen Einsatz gewinnen. Herr Glückspilz hat mit 1 € begonnen. Er hat heute eine Glückssträhne und gewinnt mehrfach hintereinander. Den ganzen Gewinn setzt er jedes Mal wieder ein.

a) Wie viel Geld hat Herr Glückspilz am Ende, wenn er dreimal nacheinander gewinnt?

b) Wie viel Geld hat Herr Glückspilz am Ende, wenn er fünfmal nacheinander gewinnt?

c) Wie lange müsste die Glückssträhne dauern, damit er Millionär wird?

5.38 Gegeben ist die geometrische Zahlenfolge: $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}.$

a) Berechne den Quotienten dieser Folge.

b) Berechne den Summenwert aller Glieder dieser Folge.

5.39. Gegeben ist eine geometrische Folge. Das 3. Glied ist 4 und das 6. Glied ist 32.

a) Bestimme das Anfangsglied und den Quotienten dieser Folge.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Berechne die Summe der ersten 6 Glieder.

5.40 Gegeben ist eine geometrische Folge. Das 4. Glied ist 2 und das 6. Glied ist 8.

a) Bestimme das Anfangsglied und den Quotienten dieser Folge.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Berechne die Summe der ersten 8 Glieder.

5.41. Zwischen 1 und 32 sind vier Glieder einzufügen, so dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht.

a) Wie heißen diese vier Folgenglieder?

b) Berechne die Summe aller Glieder.

5.42. Zwischen 3 und 48 sind drei Glieder einzufügen, so dass eine geometrische Zahlenfolge entsteht.

a) Wie heißen diese drei Folgenglieder?

b) Berechne die Summe aller Glieder.

5.43. Gegeben ist eine geometrische Zahlenfolge: $4,\ 8, \dots, 128$.

a) Gib das allgemeine Glied an.

b) Bestimme die Anzahl der Glieder.

c) Berechne die Summe aller Glieder.

5.44. Gegeben ist eine geometrische Zahlenfolge: $1,\ -2, 4, -8, \dots, 64$.

a) Gib das allgemeine Glied an.

b) Bestimme die Anzahl der Glieder.

c) Berechne die Summe aller Glieder.

5.45. Herr Pechvogel setzt bei einem Glücksspiel am Anfang 1000 € ein. Weil er verliert, setzt er im nächsten Spiel nur die Hälfte des ursprünglichen Einsatzes ein. Er verliert noch einmal und setzt im nächsten Spiel nur die Hälfte des vorigen Einsatzes ein usw.

a) Wie hoch ist der Einsatz nach dem fünften Verlust?

b) Wie viel Geld hat Herr Pechvogel nach 6 Spielen verloren?

Folgen - Abituraufgaben

5.46 Gegeben ist eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_n = -n^2 + 6n - 5$.

a) Untersuche, ob die Zahl -285 ein Glied dieser Folge ist? Begründe rechnerisch.

b) Berechne die Anzahl der positiven Glieder dieser Folge.

c) Berechne wie viele Glieder nicht kleiner als 3 sind.

5.47 Eine endliche arithmetische Folge enthält alle natürlichen zweistelligen Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

a) Wie viele Glieder enthält die Folge?

b) Wie groß ist der Summenwert aller Glieder?

5.48. Wie groß ist die Summe aller zweistelligen Zahlen, die bei der Division durch 6 den Rest 1 haben?

5.49. Gegeben ist eine arithmetische Folge der ungeraden Zahlen mit dem Anfangsglied 1. Wie viele Glieder dieser Folge müssen addiert werden, damit man als Summe 576 erhält?

5.50. Gegeben ist eine arithmetische Folge. Die Differenz des 6. und des 3. Gliedes beträgt 9 und die Summe des 4. und des 7. Gliedes beträgt 41.

a) Bestimme das Anfangsglied und die konstante Differenz.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Berechne die Summe der ersten 7 Glieder dieser Folge.

5.51. Gegeben ist eine arithmetische Folge. Der Quotient des 7. und des 3. Gliedes beträgt 5 und die Summe des 4. und des 5. Gliedes beträgt 10.

a) Bestimme das Anfangsglied und die konstante Differenz.

b) Gib das allgemeine Glied an.

c) Berechne die Summe der ersten 10 Glieder dieser Folge.

5.52. Für das Bohren eines Brunnens berechnet eine Baufirma 100 € für den ersten Meter und einen Preiszuschlag von 5 € für jeden weiteren angebrochenen Meter.

a) Bestimme das allgemeine Folgenglied, das den Meterpreis des Brunnens in Abhängigkeit von der Tiefe beschreibt?

b) Wie teuer wird der letzte Meter, wenn der Brunnen 14,1m tief ist?

c) Wie hoch werden die Kosten für diesen Brunnen (mit einer Tiefe von 14,1 m)?

5.53. Bei einem Wettbewerb sollen 5250 € unter 10 Teilnehmern so aufgeteilt werden, dass jeder folgende Teilnehmer 50 € mehr erhält als der vorhergehende. Wie viel Geld erhält der erste und wie viel erhält der letzte Teilnehmer?

5.54. Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Die Hypotenuse des Dreiecks ist 25 cm lang.

a) Berechne die Länge der Katheten dieses Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5.55. Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge mit der Differenz 2.

a) Berechne die Seitenlängen dieses Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5.56. Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Der Umfang des Dreiecks beträgt 120 cm.

a) Berechne die Seitenlängen dieses Dreiecks .

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5.57. Der Umfang eines Rechtecks beträgt $70\,\text{cm}$. Die Seitenlängen und die Diagonale dieses Rechtecks bilden eine arithmetische Folge.

a) Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

5.58. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt $108\,\text{cm}^2$. Die Seitenlängen und die Diagonale dieses Rechtecks bilden eine arithmetische Folge.

a) Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.

b) Berechne den Umfang dieses Rechtecks.

5.59. Die Winkelmaße der Innenwinkel eines Dreiecks bilden eine arithmetische Folge mit der Differenz 15°. Der größte Winkel hat ein Winkelmaß von 75°. Wie groß sind die beiden anderen Winkel?

5.60. Die Winkelmaße eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Die Hypotenuse des Dreiecks ist 6 cm lang.

a) Wie lang sind die Katheten?

b) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5.61. Die Winkelmaße der Innenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. Der Umfang des Dreiecks beträgt $6+2\sqrt{3}$ cm.

a) Berechne die Seitenlängen dieses Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5.62. Die Koeffizienten des Funktionsterms $f(x)=2x^2+bx+c$ bilden in der Reihenfolge $2,\ b,\ c$ eine arithmetische Folge. Die Symmetrieachse des Graphen dieser Funktion hat die Gleichung $x=-1$.

a) Bestimme die fehlenden Koeffizienten.

b) Gib die allgemeine Form und die Scheitelpunktform dieser Funktionsgleichung an.

5.63. Die Koeffizienten des quadratischen Trinoms ax^2+bx+c bilden in der Reihenfolge $a,\ b,\ c$ eine arithmetische Folge. Der Rest bei der Division des Trinoms durch das Binom $x-1$ beträgt 9 und bei der Division durch das Binom $x+2$ beträgt er 3.

a) Bestimme die Koeffizienten.

b) Bestimme den Rest bei der Division durch das Binom $x+1$.

5.64. Gegeben ist eine geometrische Folge. Die Summe des 1. und des 4. Gliedes beträgt 56 und die Summe des 2. und des 3. Gliedes beträgt 24.

a) Bestimme das Anfangsglied und den Quotienten dieser Folge.

b) Gib das allgemeine Glied dieser Folge an.

c) Berechne die Summe der ersten 3 Glieder.

5.65. Gegeben ist eine geometrische Folge. Die Differenz des 4. und des 1. Gliedes beträgt 26 und die Differenz des 3. und des 2. Gliedes beträgt 6.

a) Bestimme das Anfangsglied und den Quotienten dieser Folge.

b) Gib das allgemeine Glied dieser Folge an.

c) Berechne die Summe der ersten 3 Glieder.

5.66. Das Anfangsglied einer geometrischen Zahlenfolge ist 27. Die Summe von drei aufeinander folgenden Gliedern beträgt 39. Berechne den Quotienten dieser Folge.

5.67. Das größte Quadrat hat die Seitenlänge10 cm , bei den folgenden Quadraten ist die Seitenlänge jeweils halb so groß wie beim vorhergehenden.

a) Wie groß ist die Summe der Umfänge der ersten 4 Quadrate?

b) Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der ersten 4 Quadrate?

5.68. In ein Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm wird ein zweites Quadrat eingezeichnet, indem die Mittelpunkte der Seiten miteinander verbunden werden. In das so entstehende Quadrat wird in gleicher Weise wieder ein Quadrat eingezeichnet. Führe dieses Verfahren immer weiter durch.

a) Wie groß ist die Summe der Umfänge der ersten 4 Quadrate?

b) Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der ersten 4 Quadrate?

5.69. Zeichne in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 10 cm ein zweites Dreieck durch Verbinden der Seitenmittelpunkte. Zeichne ein drittes Dreieck durch Verbinden der Seitenmittelpunkte des zweiten usw.

a) Wie groß ist die Summe der Umfänge der ersten 5 Dreiecke?

b) Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der ersten 5 Dreiecke?

5.70. Die drei Zahlen, deren Summe 6 beträgt, bilden eine arithmetische Folge. Wenn man zur letzten Zahl 1 addiert, so entsteht eine geometrische Folge. Wie heißen diese drei Zahlen?

5.71. Drei Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Die Summe dieser drei Zahlen beträgt 27. Subtrahiert man von der ersten Zahl 1, von der zweiten Zahl auch 1 und addiert man zur dritten Zahl 3, so entsteht eine geometrische Folge. Wie heißen diese drei Zahlen?

5.72. Drei Zahlen, deren Summe 7 beträgt, bilden eine geometrische Folge. Wenn man von der letzten Zahl 1 subtrahiert, so entsteht eine arithmetische Folge. Wie heißen diese drei Zahlen?

5.73. Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge. Die Summe dieser drei Zahlen beträgt 26. Vergrößert man die erste Zahl um 1, die zweite Zahl um 6 und die dritte Zahl um 3, so entsteht eine arithmetische Folge. Wie heißen diese drei Zahlen?

5.74. Die drei Zahlen bilden eine geometrische Folge. Die Summe dieser drei Zahlen beträgt 42. Addiert man zur ersten Zahl 1, behält die zweite Zahl bei und subtrahiert von der dritten Zahl 7. Bilden die neuen Zahlen in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge. Wie heißen diese drei Zahlen?

5.75. Zwischen den Zahlen 7 und 9 sind drei Glieder einzufügen, so dass die ersten drei Zahlen eine arithmetische Folge bilden und die letzten drei Zahlen eine geometrische Folge bilden. Wie heißen diese drei Glieder dieser Zahlenfolge, wenn ihre Summe 8 ist?

5.76. Eine Brunnenbaufirma berechnet für das Bohren eines Brunnens 50 € für den ersten Meter. Jeder weitere Meter kostet 5% mehr als der vorhergehende.

a) Wie teuer wird der letzte Meter für eine Bohrtiefe von 8 m?

b) Wie hoch werden die Kosten für eine Bohrtiefe von 8 m?

Gib das Ergebnis als Potenz und als genauen Wert an.

5.77. Fünf Würfel werden aufeinander gelegt. Der folgende Würfel hat jeweils die halbe Kantenlänge des vorherigen. Der erste Würfel hat die Kantenlänge 10 cm.

a) Wie hoch ist der entstehende Treppenkörper?

b) Wie groß ist das Volumen des entstehenden Treppenkörpers?

Gib das Ergebnis als Potenz und als genauen Wert an.

5.78. Ein Ball fällt aus 1 m Höhe auf den Boden, prallt zurück, fällt wieder nach unten usw. Nach jedem Aufprall erreicht der Ball 70% seiner vorigen Höhe.

a) Welche Höhe erreicht der Ball nach dem 6. Aufprall?

b) Berechne den gesamten Weg des Balls bis zum Moment des 7. Aufpralles.

Gib das Ergebnis als Potenz und als genauen Wert an.

5.79. Bei einem Wettbewerb bilden die Geldpreise eine fallende geometrische Folge. Der erste Preis beträgt 2400 € und der fünfte Preis 150 €. Bestimme die Preisverteilung.

5.80. Bei einem Wettbewerb sollen 3875 € als Geldpreise vergeben werden. Diese Preise bilden eine fallende geometrische Folge. Der erste Preis beträgt 2000 € und der niedrigste Preis nur noch 125 €. Berechne die Anzahl der Preise und bestimme die Preisverteilung.

6. Finanzmathematik

Prozentrechnung

Ein Prozent einer Zahl ist der 100-ste Teil dieser Zahl. Für ein Prozent schreibt man: 1%.

Die grundlegende Formel der Prozentrechnung lautet:

Prozentwert = Prozentsatz · Grundwert

$$W = p\% \cdot G$$

p% bedeutet $\frac{p}{100}$

Zur Berechnung der Zinsen nach Ablauf eines Jahres benutzt man die Formel:

Zinsen = Zinssatz · Kapital

$$Z = p\% \cdot K$$

4% p.a. (per annum) d.h. 4% pro Jahr

Der Zinssatz 4 % p.a. vermehrt das angelegte Kapital in einem Jahr um 4 Prozent.

Beispiel 6.1.

Wie viel Zinsen bringt ein Kapital von 1000 € bei einem Zinssatz von 6% p.a. nach Ablauf eines Jahres?

$K = 1000$ € $\quad p = 6\%$ p.a. $\quad \boldsymbol{Z = \frac{p}{100} \cdot K} \quad Z = \frac{6}{100} \cdot 1000 = 60$

Antwort: Ein Kapital von 1000 € bringt bei einem Zinssatz von 6% p.a. nach Ablauf eines Jahres 60 € Zinsen.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Zinssatz - . . . .

die Zinsen - . . . .

das Kapital - . . . .

die Zinsen nach Ablauf eines Jahres - . . . .

. . . .

Monatszinsen und Tageszinsen

Die Zinsen können für Jahre, Monate und Tage berechnet werden. Für die Umrechnung gilt das Geschäftsjahr (360 Tage).

1 Jahr = 360 Tage **1 Monat = 30 Tage**

Die Zinsen **für 1 Monat** sind $\frac{1}{12}$ der jährlichen Zinsen.

Die Zinsen für 7 Monate sind $\frac{7}{12}$ der jährlichen Zinsen.

Die Zinsen **für einen Tag** sind $\frac{1}{360}$ der jährlichen Zinsen.

Die Zinsen für 7 Tage sind $\frac{7}{360}$ der jährlichen Zinsen.

Damit erhalten wir die Zinsformel: $Z = p\% \cdot K \cdot t$

Zinsen = Zinssatz · Zeitfaktor · Kapital

$$Z = p\% \cdot t \cdot K$$

Um die Zinsen für Bruchteile eines Jahres zu berechnen, muss man die jährlichen Zinsen mit dem entsprechenden Bruch multiplizieren. Diesen Bruch nennt man **Zeitfaktor *t***.

Beispiel 6.2.

Wie viel Zinsen bringt ein Kapital von 1000 € bei einem Zinssatz von 6% p.a. nach Ablauf eines Monats?

$K = 1000$ € $\quad p = 6\%$ p.a. $\qquad Z = \frac{p}{100} \cdot t \cdot K \qquad Z = \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{12} \cdot 1000 = 5$

Antwort: Ein Kapital von 1000 € bringt bei einem Zinssatz von 6% p.a. nach Ablauf eines Monats 5 € Zinsen.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Zeitfaktor - . . . .

das Geld verleihen - . . . .

das Geld leihen - . . . .

6.1. Ergänze in ☐ Begriffe aus der Wortliste, so dass eine wahre Aussage entsteht.

Es gibt jeweils nur eine richtige Lösung.

a) Ist der Prozentsatz kleiner als 100%,

dann ist der Prozentwert ☐ (**A** größer als / **B** gleich groß wie / **C** kleiner als) der Grundwert.

b) Ist der Prozentsatz größer als 100%,

dann ist der Prozentwert ☐ (**A** größer als / **B** gleich groß wie / **C** kleiner als) der Grundwert.

c) Wenn jemand Geld verleiht, ☐ (**A** bezahlt / **B** bekommt / **C** erbt) derjenige Zinsen

und wenn jemand Geld leiht, ☐ (**A** bezahlt / **B** bekommt / **C** erbt) derjenige Zinsen.

d) Zinsen sind ☐ (**A** ein Prozentsatz / **B** ein Prozentwert / **C** ein Grundwert) des Kapitals,

der von der Höhe ☐ (**A** der Zinsen / **B** des Kapitals / **C** des Zinssatzes) abhängig ist.

e) Man erhält eine Erhöhung des Grundwertes um $p\%$,

wenn man ☐ (**A** $1-\frac{p}{100}$ / **B** $\frac{p}{100}$ / **C** $1+\frac{p}{100}$ / **D** $2\cdot\frac{p}{100}$) vom Grundwert berechnet.

f) Man erhält eine Erhöhung des Grundwertes um $p\%$, wenn man

zum Grundwert ☐ $\begin{pmatrix} \textbf{A} \text{ den Prozentsatz} \\ \textbf{B} \text{ den Prozentwert} \\ \textbf{C} \text{ die Prozente} \end{pmatrix}$ $p\%$ des Grundwerts addiert.

g) Man erhält eine Verminderung des Grundwertes um $p\%$,

wenn man ☐ $\begin{pmatrix} \textbf{A} \ \ 1-\frac{p}{100} \\ \textbf{B} \ \ \frac{p}{100} \\ \textbf{C} \ \ 1+\frac{p}{100} \\ \textbf{D} \ \ 2\cdot\frac{p}{100} \end{pmatrix}$ vom Grundwert berechnet.

h) Man erhält eine Verminderung des Grundwertes um $p\%$, wenn man

vom Grundwert ☐ $\begin{pmatrix} \textbf{A} \text{ den Prozentsatz} \\ \textbf{B} \text{ den Prozentwert} \\ \textbf{C} \text{ die Prozente} \end{pmatrix}$ $p\%$ des Grundwerts subtrahiert.

6.2. Eine Aktie gewinnt dreimal hintereinander 5% an Wert hinzu. Um wie viel Prozent hat sie insgesamt an Wert hinzugewonnen?

6.3. Eine Aktie verliert zweimal nacheinander 4% und gewinnt danach zweimal 4% ihres Wertes. Um wie viel Prozent hat sie insgesamt an Wert verloren?

6.4. Eine Aktie gewinnt einmal 5%, dann 6% und dann 7% an Wert hinzu. Um wie viel Prozent hat sie insgesamt an Wert hinzugewonnen?

6.5. Eine Aktie verliert zweimal nacheinander 5%, dann zweimal 6% und dann zweimal 7 % ihres Wertes. Um wie viel Prozent hat sie insgesamt an Wert verloren?

6.6. Der Preis für das Auslaufmodell eines Fotoapparats wurde nacheinander um 5%, 10% und 10% herabgesetzt. Nach der letzten Preissenkung kostete der Fotoapparat 307,80 €.

Berechne den ursprünglichen Preis.

Zahlt man bei einer Bank oder Sparkasse Geld für eine vereinbarte Zeit ein, so spricht man von **Festgeld**.

Für Festgelder werden höhere Zinssätze gewährt als für normale Sparkonten.

6.7. Auf welchen Betrag wächst ein Sparguthaben von 10 000 € an, das 9 Monate zu 6% p.a. verzinst wird?

6.8. Die Bank Goldener Knauser zahlt für 10 000 € 9% p.a. Zinsen, wenn man das Geld für 3 Monate anlegt. Berechne die Zinsen für diesen Zeitraum.

6.9. Die Bank Goldener Geizhals zahlt für 10 000 € 8% p.a. Zinsen, wenn man das Geld für 6 Monate anlegt. Berechne die Zinsen für diesen Zeitraum.

6.10. Welches Kapital bringt 900 € Zinsen in 3 Monaten bei einem Zinssatz von 9% p.a.?

6.11. Frau Knauserig erhält nach 90 Tagen für ihr Festgeld 812,50 € Zinsen.

Welches Kapital hat sie angelegt, wenn die Bank einen Zinssatz von 6,5% p.a. zahlt?

6.12. Eine Bank verlangt für einen Kredit von 15 000 € einen Jahreszins von 2 025 €. Mit welchem Zinssatz rechnet die Bank?

6.13. Herr Verschwenderisch musste sein Haus mit einer Hypothek von 100 000 € belasten. Der Hypothekenzinssatz beträgt 7%. Berechne die Hypothekenzinsen nach Ablauf eines Jahres.

6.14. Die Rechnung in Höhe von 10 000 € der Firma *Geizkragen GmbH* wurde 90 Tage zu spät beglichen. Die Firma (*Geizkragen GmbH*) verlangt für diese Zeit einen Zinssatz von 30% p.a. Berechne die Höhe der Zinsen.

Beispiel 6.3.

Frau Geizhals hat bei ihrer Bank 10 000 € angelegt. Sie will den Kontostand nach Ablauf von 3 Jahren berechnen, ohne für jedes einzelne Jahr die Zinsen auszurechnen. Der Zinssatz beträgt 4% p.a. und die Zinsen werden mitverzinst.

Anfangskapital: $K = 10\ 000$ €

Zinssatz: $p\% = 4\%\ p.a.$

Laufzeit: *3 Jahre*

1. *Nach dem ersten Jahr ist das Kapital*: $K_1 = \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot K = 1{,}04 \cdot K$

$K_1 = K$ + Zinsen $\qquad$ K_1 - Kapital nach dem 1. Jahr

2. *Nach dem zweiten Jahr ist das Kapital*: $K_2 = \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot K_1 = K\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$

$$K_2 = 1{,}04 \cdot K_1 = 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot K = (1{,}04)^2 \cdot K$$

$K_2 = K_1 + Zinsen$ $\qquad$ K_2 - *Kapital nach dem 2. Jahr*

3. *Nach dem dritten Jahr ist das Kapital*: $K_3 = \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot K_2 = K\left(1 + \frac{4}{100}\right)^3$

$$K_3 = 1{,}04 \cdot K_2 = 1{,}04 \cdot (1{,}04)^2 \cdot K = (1{,}04)^3 \cdot K$$

$K_3 = K_2 + Zinsen$ $\qquad$ K_3 - Kapital nach dem 3. Jahr

Nach Ablauf eines jeden Jahres beträgt das Kapital $1 + \frac{4}{100}$ *des Kapitals am Anfang des Jahres. Bei einem Zinssatz von 4 % p.a. ergibt sich für die Berechnung des Endkapitals der **Zinsfaktor*** $1{,}04$.

$$K_1 = K \cdot 1{,}04$$

$$K_2 = K \cdot (1{,}04)^2$$

$$K_3 = K \cdot (1{,}04)^3$$

$$K_3 = 10\ 000 \cdot (1{,}04)^3 = 10\ 000 \cdot 1{,}124864 = 11\ 248{,}64$$

Antwort: Der Kontostand nach Ablauf von 3 Jahren beträgt $11\ 248{,}64$ €.

Wenn die Zinsen eines Kapitals regelmäßig nach einem bestimmten Zeitraum zum Kapital addiert und dann **mitverzinst** werden, so spricht man von **Zinseszinsen**.
Der **Zinseszins** ist das Geld, das man von der Bank für die Zinsen bekommt.

6.15. Berechne, auf welchen Betrag ein Kapital von 1000 € durch Verzinsung zu 8% p.a.

a) in 5 Jahren **b)** in 10 Jahren **c)** in 20 Jahren anwächst.

6.16. Wie viel Geld muss man auf ein Sparkonto einzahlen, um bei einem Zinssatz von 7% p.a. nach Ablauf von 3 Jahren 12 250,43 € angespart zu haben? Einzahlungen und Abhebungen erfolgen keine.

6.17. Die Geschwister Geizkragen haben von ihrer Oma Geld geerbt. Das Erbe muss auf der Bank bleiben bis sie volljährig sind. Helga ist jetzt 12 und Peter 14 Jahre alt. Der Jahreszinssatz beträgt 5% p.a.. Helga hat 2000 € und Peter 2200 € geerbt. Wer bekommt mehr Geld von der Bank und wie viel mehr?

6.18. Herr Kleinsparer hat auf einem Sparbuch 1 100 € zu 3% jährlich angelegt. Seine Frau hat parallel dazu auf einem Sparbuch 1 000 € zu 4% jährlich angelegt. Einzahlungen und Abhebungen erfolgen keine.

a) Berechne das Guthaben auf beiden Sparbüchern nach 7 Jahren.

b) Nach wie vielen Jahren ist das Guthaben der Frau Kleinsparer erstmals höher als das Guthaben des Mannes?

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Zinseszins - . . . .

die Zinsen werden mitverzinst - . . . .

Einzahlungen und Abhebungen erfolgen keine - . . . .

Nach Ablauf eines jeden Jahres ist der Kontostand $1+\frac{p}{100}$ des Kapitals vom Anfang des Jahres. Bei einem Zinssatz von p % ergibt sich für die Berechnung des Endkapitals der **Zinsfaktor** $1+\frac{p}{100}$.

Das Endkapital K_n nach Ablauf von n Jahren bei einem Zinssatz von $p\%$, berechnet man mit der Formel (Die Zinsen werden mitverzinst):

$$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = Kq^n$$

K - Anfangskapital

K_n - Endkapital nach Ablauf von n Jahren

n - Anzahl der Jahre

p - Zinssatz in einem Jahr

q - Zinsfaktor $\quad q = 1+\frac{p}{100}$

Der Zinsfaktor ist die Zahl, mit der man den Kontostand multiplizieren muss, um seinen Wert nach der nächsten Verzinsung zu erhalten.

Die Zahlen $K, K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten q $\quad q = 1+\frac{p}{100}$.

$$K \xrightarrow{\cdot q} K_1 \xrightarrow{\cdot q} K_2 \xrightarrow{\cdot q} \ldots \xrightarrow{\cdot q} K_n$$

$$K_1 = K \cdot q \qquad K_2 = K \cdot q^2 \qquad K_n = K \cdot q^n$$

$$\frac{K_2}{K_1} = q\,, \quad \frac{K_3}{K_2} = q\,, \ldots, \quad \frac{K_n}{K_{n-1}} = q$$

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Zinsfaktor - . . . .

der Prozentpunkt - . . . .

Beispiel 6.4.

Herr Geizhals hat bei seiner Bank 10 000 € angelegt. Der Zinssatz beträgt 3% im ersten Jahr, 4% im zweiten Jahr und 5% im dritten Jahr und die Zinsen werden mitverzinst. Er will den Kontostand nach Ablauf von 3 Jahren berechnen, ohne für jedes einzelne Jahr die Zinsen auszurechnen.

Anfangskapital: $K = 10\ 000$ €

Zinssatz: $p_1 = 3\,\%$, $p_2 = 4\,\%$, $p_3 = 5\,\%$ *(p.a.)*

Laufzeit: *3 Jahre*

1. *Nach dem ersten Jahr ist das Kapital*: $\boldsymbol{K_1} = \boldsymbol{K} \cdot 1{,}03$

2. *Nach dem zweiten Jahr ist das Kapital*: $\boldsymbol{K_2} = 1{,}04 \cdot \boldsymbol{K_1} = 1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot \boldsymbol{K}$

3. *Nach dem dritten Jahr ist das Kapital*: $\boldsymbol{K_3} = 1{,}05 \cdot \boldsymbol{K_2} = 1{,}05 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot \boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K_1} = \boldsymbol{K} \cdot q_1 \ , \qquad q_1 = 1 + \frac{p_1}{100} \qquad q_1 = 1 + \frac{3}{100}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \boldsymbol{K_1} \cdot q_2 = \boldsymbol{K} \cdot q_1 \cdot q_2 \ , \qquad q_2 = 1 + \frac{p_2}{100} \qquad q_2 = 1 + \frac{4}{100}$$

$$\boldsymbol{K_3} = \boldsymbol{K_2} \cdot q_3 = \boldsymbol{K} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \ , \qquad q_3 = 1 + \frac{p_3}{100} \qquad q_3 = 1 + \frac{5}{100}$$

$$\boldsymbol{K_3} = \boldsymbol{K}\left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{4}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$\boldsymbol{K_3} = \mathbf{10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05} = 10\ 000 \cdot 1{,}12476 = \mathbf{11\,247{,}60}$$

Antwort: Der Kontostand nach Ablauf von 3 Jahren beträgt 11 247,60 €.

6.19. Ein Kapital nimmt in zwei Jahren um 23,2 % zu. Der Zinssatz im zweiten Jahr ist um zwei Prozentpunkte höher als im ersten Jahr. Die Zinsen für das erste Jahr werden mitverzinst. Berechne den Zinssatz im ersten Jahr.

Das Endkapital K_n nach Ablauf von n Jahren bei einem Zinssatz im i-ten Jahr von p_i berechnet man mit der Formel (Die Zinsen werden mitverzinst):

$$K_n = K\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)$$

K - Anfangskapital

K_n - Endkapital nach Ablauf von n Jahren

n - Anzahl der Jahre

p_i - Zinssatz im i-ten Jahr

q_i - Zinsfaktor im i-ten Jahr $\qquad q_i = 1+\frac{p_i}{100}$

6.20. Beim Sparen mit wachsendem Zins wird das angelegte Geld im 1. Jahr mit 3% verzinst, im 2. Jahr mit 4%, im 3. Jahr mit 5% und im 4. Jahr mit 6%. Die anfallenden Zinsen werden jeweils dem Kapital zugerechnet und dann mitverzinst.

a) Um wie viel Prozent ist ein Startkapital nach Ablauf der 4 Jahre gewachsen?

b) Berechne das Endkapital für ein Anfangskapital von 1 000 €.

6.21. Herr Knauser vergleicht die Angebote von zwei Banken.

Goldener Schatz

Laufzeit: *5 Jahre*
Kapital: *kein Mindestkapital*
Zinssatz:
in den ersten 2 Jahren 3 % p.a.,
dann 4 % p.a.

Glänzender Geiz

Laufzeit: *keine Begrenzungen*
Kapital: *ab 10 000 €*
Zinssatz: *monatliche Verzinsung*
3.6 % p.a.

a) Untersuche, welches Angebot auf 5 Jahre günstiger ist.

b) Wie viel Zinsen mehr bringt das günstigere Angebot für ein Startkapital von 10 000 €?

c) Wie groß ist der durchschnittliche Zinssatz über 5 Jahre hinweg bei der Bank „Goldener Schatz“?

Bei einer **Inflationsrate** von i % sinkt die Kaufkraft des Geldes pro Jahr auf das $\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{100}}$ - fache des Anfangswertes.

6.22. Ergänze:

a) Bei einer Inflationsrate von 5% sinkt die Kaufkraft des Geldes im Jahr auf

das . . . . - fache des Anfangswertes.

b) Bei einer Inflationsrate von 6% sinkt die Kaufkraft des Geldes im Jahr auf

das . . . . - fache des Anfangswertes.

c) Bei einer Inflationsrate von 10% sinkt die Kaufkraft des Geldes im Jahr auf

das . . . . - fache des Anfangswertes.

6.23. Berechne die Kaufkraft von 1000 € bei einer Inflationsrate von 2%

a) nach Ablauf des ersten Jahres,

b) nach Ablauf des zweiten Jahres.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Inflation - . . . .

die Inflationsrate - . . . .

die monatliche Inflationsrate - . . . .

die jährliche Inflationsrate - . . . .

eine steigende Inflationsrate - . . . .

eine sinkende Inflationsrate - . . . .

die Kaufkraft des Geldes im Jahr sinkt auf das n-fache des Anfangswertes - . . . .

die Kaufkraft steigt - . . . .

die Kaufkraft fällt - . . . .

die Kaufkraft bleibt konstant - . . . .

Finanzmathematik - Aufgaben

6.24. Bei einer Inflationsrate von 10% sinkt die Kaufkraft des Geldes im Jahr auf das $\frac{100}{110}$ - fache des Anfangswertes. Auf welchen Bruchteil ist die Kaufkraft

a) in 2 Jahren, **b)** in 5 Jahren, **c)** in 10 Jahren gesunken?

6.25. Berechne die Kaufkraft von 1000 € bei einer Inflationsrate von 4%:

a) nach Ablauf des ersten Jahres,

b) nach Ablauf des zweiten Jahres,

c) nach Ablauf des dritten Jahres.

6.26. Die monatliche Inflationsrate beträgt 2%. Berechne die jährliche Inflationsrate.

6.27. Die monatliche Inflationsrate beträgt 3%. Berechne die jährliche Inflationsrate.

6.28. Die monatliche Inflationsrate beträgt 5%. Berechne die jährliche Inflationsrate.

6.29. Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital bei einer Verzinsung von 10% p.a. verdoppelt?

6.30. Auf welchen Betrag wäre 1 € angewachsen, wenn er bei Christi Geburt bis zum Ende des Jahres 2007 mit einem Zinssatz von 3% angelegt worden wäre?

6.31. Herr Geizkragen besitzt ein Sparkonto. Der Kontostand betrug vor 2 Jahren 3 000 € und er hat damals die letzte Einzahlung gemacht. Sein derzeitiger Kontostand beträgt 4410 €. Wie hoch war die letzte Einzahlung von Herrn Geizkragen, wenn der Jahreszinssatz 5% p.a. beträgt?

6.32. Ein Kapital nimmt in zwei Jahren um 24,3% zu. Der Zinssatz im zweiten Jahr ist um drei Prozentpunkte höher als im ersten Jahr. Die Zinsen für das erste Jahr werden mitverzinst. Wie hoch war der Zinssatz im zweiten Jahr?

Vermischte Aufgaben

6.33. Eine Region in einem Entwicklungsland hat 100 000 Einwohner. Die Bevölkerungszahl nimmt durchschnittlich pro Jahr (jährlich) um 2% zu. Mit welcher Einwohnerzahl kann man (statistisch) bei dieser Wachstumsrate rechnen?

a) in 10 Jahren

b) in 20 Jahren

c) In wie vielen Jahren verdoppelt sich die Anzahl der Einwohner?

Gib das Ergebnis als Potenz an und runde auf volle Tausender.

6.34. Die Bevölkerung eines Landes beträgt 40 Millionen. Berechne die Einwohnerzahl nach 10 Jahren, wenn der durchschnittliche jährliche Zuwachs:

a) 1% und

b) 2% beträgt.

Gib das Ergebnis als Potenz an und runde auf volle Tausender.

6.35. Das Herzogtum Kleinschen hatte vor 20 Jahren 500 000 Einwohner. Jetzt sind es schon 610 000 Einwohner.

a) Um wie viel Prozent hat sich die Einwohnerzahl jedes Jahr vergrößert, wenn die jährliche prozentuale Zunahme stets gleich geblieben ist?

b) Nach wie vielen Jahren hat sich die Einwohnerzahl bei dieser jährlichen Wachstumsrate verdoppelt?

6.36. Frau Klatschbase erzählt ihren drei Nachbarinnen in der ersten Stunde einen Klatsch. Jede Nachbarin erzählt es danach drei Bekannten in der zweiten Stunde. Jede dieser Bekannten erzählt es wiederum drei Bekannten usw.

a) Wie viele Personen (außer Frau Klatschbase) kennen diesen Klatsch nach 10 Stunden?

b) Wie viele Personen (außer Frau Klatschbase) kennen diesen Klatsch nach n Stunden?

c) Nach wie vielen Stunden haben Tausend Menschen davon erfahren?

6.37. Eine Bakterienkultur umfasst zu Beginn einer Beobachtung 100 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien vergrößert sich alle 15 Minuten um 20%.

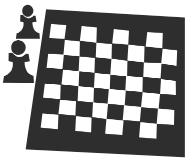
a) Wie viele Bakterien sind es nach 30 Minuten der Beobachtung?

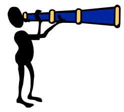
b) Wie viele Bakterien sind es nach 2 Stunden der Beobachtung?

c) Wie viele Bakterien sind es nach n Stunden der Beobachtung? Bestimme die Gleichung, die die Anzahl der Bakterien nach n Stunden beschreibt.

d) In wie vielen Stunden verzehnfacht sich die Anzahl der Bakterien?

Anhang nr.1 - Schachspiel





Nach einer persischen Legende erbat sich der Erfinder des Schachspiels (um 880 n. Chr.) als Belohnung für das erste der 64 Felder des Schachbretts ein Weizenkorn, für das zweite zwei, für das dritte vier usw., also immer für das folgende Feld doppelt so viele Weizenkörner wie für das vorhergehende.

a) Trage in diese Tabelle ein, wie viele Körner auf den ersten 13 Feldern liegen.

Feldnummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Anzahl der Körner							

Feldnummer	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Anzahl der Körner						

Wie groß ist die genaue Anzahl der Körner auf dem 13. Feld? . . . .

Wie groß ist die genaue Anzahl der Körner auf dem 20. Feld? . . . .

Wie groß ist die Anzahl der Körner auf dem 64. Feld? . . . .

b) Wie viele Körner ergeben sich für das gesamte Schachbrett?

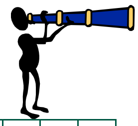
c) Warum ist die Körnerzahl eine ungerade Zahl? . . . .
Die Rechnung ergab 18 446 744 073 709 551 615 Körner.

d) Wie viele Tonnen wiegt die Gesamtmenge, wenn 20 000 Körner etwa 1kg wiegen?

Rechne mit: $2^{10} \approx 10^3$ und $2^{64} - 1 \approx 2^{64}$

Alle Vorräte des Landes hätten zusammen nur einen winzigen Teil dieser Menge ergeben.

Man produziert pro Jahr ca. 600 Millionen Tonnen Weizen.



e) Wie groß ist das Volumen aller Körner, wenn auf 1 cm^3

8 Weizenkörner kommen? Gib das Ergebnis in km^3 an.

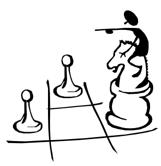
f) Wie viele Güterwaggons (26,5 t) können gefüllt werden?

g) Wie lang ist der Zug, wenn ein Waggon 9 m lang ist?

h) Wie lange würde man brauchen um die Körner abzuzählen, wenn in jeder Minute 100 Körner gezählt würden?
Der Arbeitstag wird mit 10 Stunden und das Jahr mit 360 Tagen gerechnet.

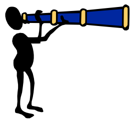
Was bedeuten die folgenden Begriffe auf Polnisch?

abzählen - . . . .
wiegen, **wog**, *hat* **gewogen** - . . . .
der Güterwaggon - . . . .
doppelt so viel - . . . .



der Schah - der Titel des Herrschers in Persien
das Schachspiel, Schach *nur Sg.* - ein Spiel für zwei Personen

das Schachbrett - ein Brett mit 64 (quadratischen) weißen und schwarzen Feldern, auf dem man Schach spielt.
die Tonne - eine Maßeinheit, die 1000 kg bezeichnet; *Abk.* t



Klammern

Man liest:

(	**runde Klammer auf**	**)**	**runde Klammer zu**
[	**eckige Klammer auf**	]	**eckige Klammer zu**
{	**geschweifte Klammer auf**	**}**	**geschweifte Klammer zu**

Lies nach dem Beispiel:

$[-(2 + x) + 5^2]^4$ *eckige Klammer auf, minus runde Klammer auf, zwei plus x, runde Klammer zu, plus fünf zum Quadrat, eckige Klammer zu, hoch vier*

1. $-9(2 + 6)$ . . . .

. . . .

2. $(a + b)^2 - (a - b)^2$ . . . .

. . . .

3. $[y - (3 + y)^3]^2$ . . . .

. . . .

4. $\{[(\sqrt{z}\,)^2]^4\}^6$ . . . .

. . . .

. . . .

5. $\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{7}\right)^2$ . . . .

. . . .

6. $(|x| - |y|)^{\frac{1}{2}}$ . . . .

. . . .

7. $\left(\frac{2a^7}{10\sqrt{b}}\right)^5$ . . . .

. . . .

8. $[(A \cup B) \cap C] \setminus D$ . . . .

. . . .

. . . .

9. $(p \vee q) \wedge r$ . . . .

. . . .

10. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$ . . . .

. . . .

Lösung

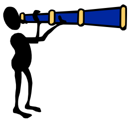
1. Minus neun, runde Klammer auf, zwei plus sechs, runde Klammer zu.
2. Runde Klammer auf, *a* plus *b*, runde Klammer zu, hoch zwei, minus runde Klammer auf, *a* minus *b*, runde Klammer zu, hoch zwei.
3. Eckige Klammer auf, *y* minus runde Klammer auf, drei plus *y*, runde Klammer zu, hoch drei, eckige Klammer zu, hoch zwei.
4. Geschweifte Klammer auf, eckige Klammer auf, runde Klammer auf, Wurzel aus *z*, runde Klammer zu, hoch zwei, eckige Klammer zu, hoch vier, geschweifte Klammer zu, hoch sechs.
5. Runde Klammer auf, zwei Fünftel, runde Klammer zu, hoch vier, geteilt durch runde Klammer auf, drei Siebtel, runde Klammer zu, hoch zwei.
6. Runde Klammer auf, Betrag aus *x* minus Betrag aus *y*, runde Klammer zu, hoch einhalb.
7. Runde Klammer auf, zwei mal *a* hoch sieben, geteilt durch zehn mal Wurzel aus *b*, runde Klammer zu, hoch fünf.
8. Eckige Klammer auf, runde Klammer auf, *A* vereinigt mit *B*, runde Klammer zu, geschnitten mit *C*, eckige Klammer zu, ohne *D*.
9. Runde Klammer auf, *p* oder *q*, runde Klammer zu, und *r*.
10. Runde Klammer auf, aus *p* folgt *q*, runde Klammer zu, genau dann wenn *r* gilt.

Schreibe mit Hilfe der Symbole:

1. Runde Klammer auf, *a* plus *b*, runde Klammer zu, hoch drei.
2. Runde Klammer auf, sechs Elftel, runde Klammer zu, hoch *n*, geteilt durch zwei.
3. Ein Drittel mal eckige Klammer auf, minus runde Klammer auf, *x* plus zwölf, runde Klammer zu, eckige Klammer zu.
4. Eckige Klammer auf, *x* plus runde Klammer auf, eins minus *y*, runde Klammer zu, hoch zwei, eckige Klammer zu, hoch drei.
5. Runde Klammer auf, Wurzel aus *x* plus *y*, runde Klammer zu, hoch zwei.
6. Geschweifte Klammer auf, eckige Klammer auf, runde Klammer auf, Wurzel aus vier, runde Klammer zu, hoch drei, eckige Klammer zu, hoch zwei, geschweifte Klammer zu, hoch vier.
7. Runde Klammer auf, drei Fünftel, runde Klammer zu, hoch ein Drittel, geteilt durch runde Klammer auf, zwei Neuntel, runde Klammer zu, hoch zwei.
8. *A* ohne, runde Klammer auf, *B* vereinigt mit *C*, runde Klammer zu.
9. Nicht, runde Klammer auf, *p* oder *q*, runde Klammer zu, gleich, nicht *p* und nicht *q*

Lösung

1. $(a + b)^3$
2. $\left(\frac{6}{11}\right)^n : 2$
3. $\frac{1}{3}[-(x+12)]$
4. $\left[x+(1-y)^2\right]^3$
5. $\left(\sqrt{x+y}\right)^2$
6. $\{\ \left[(\sqrt{4})^3\right]^2\ \}^4$
7. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{2}{9}\right)^2$
8. $A \setminus (B \cup C)$
9. $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

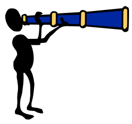


Klapptest - Brüche

Falte zuerst das Blatt entlang der Linie und löse danach folgende Aufgaben (Du kannst die linke oder rechte Seite wählen). Kontrolliere anschließend die Ergebnisse.

Lies die Zahlen nach dem Muster:		Schreibe als Symbol:	
$\frac{1}{3}$	ein Drittel	ein Drittel	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{5}$	....	zwei Fünftel	.....
$\frac{7}{9}$	....	sieben Neuntel	.....
$\frac{3}{4}$	....	drei Viertel	.....
$\frac{5}{18}$	....	fünf Achtzehntel	.....
$\frac{1}{7}$	....	ein Siebtel	.....
$\frac{18}{20}$	....	achtzehn Zwanzigstel	.....
$\frac{6}{23}$	....	sechs Dreiundzwanzigstel	.....
$\frac{20}{37}$	....	zwanzig Siebenunddreißigstel	.....
$\frac{17}{40}$	....	siebzehn Vierzigstel	.....
$\frac{30}{100}$	....	dreißig Hundertstel	.....
$\frac{1}{1000}$	....	ein Tausendstel	.....
$1\frac{1}{3}$	ein ein Drittel	ein ein Drittel	.....
$3\frac{3}{6}$	....	drei drei Sechstel	.....
$10\frac{1}{8}$	....	zehn ein Achtel	.....
$100\frac{5}{100}$	....	hundert fünf Hundertstel	.....
$30\frac{3}{4}$	....	dreißig drei Viertel	.....

Wurzeln

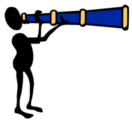


Fülle die weißen Kästchen aus. Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite.

$\sqrt{2}$	**Wurzel aus zwei**	$5 + \sqrt{3}$	**fünf plus Wurzel aus drei**
	Wurzel aus zehn		**Wurzel aus drei geteilt durch neun**
$\sqrt{\frac{1}{5}}$		$10\sqrt{6}$	
	Wurzel aus zehn Elftel		**Wurzel aus zwanzig hoch drei**
$\sqrt{2,5}$			**Wurzel aus neun hoch zwei**
	Wurzel aus zwei Komma drei sieben	$\sqrt[3]{8}^{4}$	
$\sqrt[3]{4}$	**dritte Wurzel aus vier**	$\sqrt[3]{6-3}$	**dritte Wurzel aus sechs minus drei**
$\sqrt[3]{20}$		$\sqrt[3]{x}^{5}$	
	dritte Wurzel aus ein einhalb		***n* – te Wurzel aus 100**

Lösungen - Wurzeln

$\sqrt{2}$	**Wurzel aus zwei**	$5 + \sqrt{3}$	**fünf plus Wurzel aus drei**
$\sqrt{10}$	**Wurzel aus zehn**	$\sqrt{3} : 9$	**Wurzel aus drei geteilt durch neun**
$\sqrt{\frac{1}{5}}$	**Wurzel aus ein Fünftel**	$10 \sqrt{6}$	**zehn mal Wurzel aus sechs**
$\sqrt{\frac{10}{11}}$	**Wurzel aus zehn Elftel**	$\sqrt{20^3}$	**Wurzel aus zwanzig hoch drei**
$\sqrt{2{,}5}$	**Wurzel aus zwei Komma fünf**	$\sqrt{9^2}$	**Wurzel aus neun hoch zwei**
$\sqrt{2{,}37}$	**Wurzel aus zwei Komma drei sieben**	$\sqrt[3]{8}^{4}$	**dritte Wurzel aus acht hoch vier**
$\sqrt[3]{4}$	**dritte Wurzel aus vier**	$\sqrt[3]{6}–3$	**dritte Wurzel aus sechs minus drei**
$\sqrt[3]{20}$	**dritte Wurzel aus zwanzig**	$\sqrt[3]{x^5}$	**dritte Wurzel aus x hoch fünf**
$\sqrt[3]{1\frac{1}{2}}$	**dritte Wurzel aus ein einhalb**	$\sqrt[n]{100}$	***n* – te Wurzel aus 100**
$\sqrt[3]{9{,}7}$	**dritte Wurzel aus neun Komma sieben**	$\sqrt[n]{y^m}$	***n*– te Wurzel aus y hoch *m***



Steigungen bei Treppen

Ob eine Treppe sicher und bequem zu begehen ist, hängt von der Stufenhöhe *s* und dem Auftritt *a* ab.

Im Treppenbau gilt die Regel: $60 \leq 2s + a \leq 65$ (in cm).

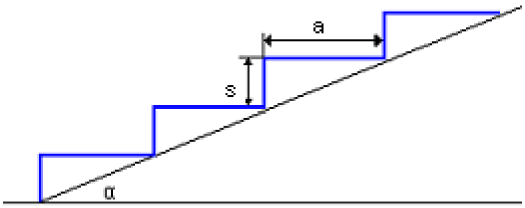


Bild 1

a - Auftritt

s – Stufenhöhe

α - Steigungswinkel

$\text{tg } \alpha = \frac{s}{a}$

Angaben für verschiedene Treppen

	Einfamilien-haus	Hochhaus, Schule	Kindergarten, Krankenhaus	Kellertreppen	Rampen
Maximale Stufenhöhe s (cm)	19	17,5	15	20	13

1. In einem Einfamilienhaus mit einer Stockwerkshöhe von 2,38 m steht für die Treppe eine etwa 4 m lange Grundfläche zur Verfügung. Berechne die passende Stufenhöhe für eine regelgerechte Treppe.

2. Eine Treppe (*Bild 2*) hat fünf Stufen. Für jede Stufe gilt: der Auftritt ist 28 cm, die Stufenhöhe ist 17 cm.

a) Handelt es sich um eine regelgerechte Treppe?

b) Wie lang ist das Geländer für die Treppe?

c) Wie ist der Steigungswinkel?

3. Der Steigungswinkel einer Kellertreppe ist gleich 43°. Die Breite der Stufen beträgt 21 cm. Handelt es sich um eine regelgerechte Treppe?

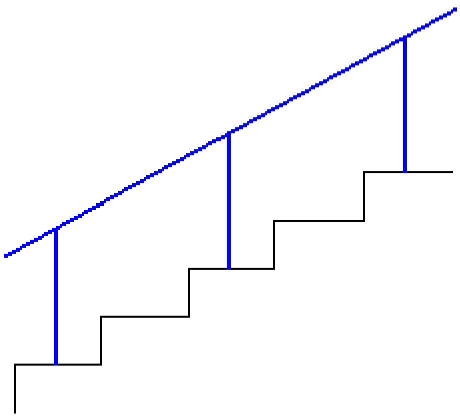


Bild 2

4. In einem Schulhaus mit einer Stockwerkshöhe von 2,88 m soll die Stufenhöhe 16 cm betragen. Berechne den Auftritt und die Anzahl der Stufen.

5. Entwirf eine regelgerechte Treppe.

7. Lösungen

1. Polynom

1.1. a) Polynom fünften Gerades, **b)** Polynom siebten Gerades, **c)** Polynom ersten Gerades

d) Polynom vom Grad Null.

1.2. a) $-6x - 4$, ersten Gerades, **b)** $5x^2 - 12x + 16$, zweiten Gerades,

c) $8x^4 + 24x^2 + 16x + 16$, vierten Gerades.

1.3. a) $a = 1$, **b)** $a = -5$, **c)** $a \neq -5$ und $a \neq 1$.

1.4. a) $-x^2 - 10x + 9$, **b)** $7x^2 + 3x - 4$, **c)** $6x^4 + 7x^3 - 35x^2 + 29x - 7$, **d)** $10x^2 - 15x + 5$.

1.5. a) -1, **b)** 200, **c)** 0.

1.6. a) $P(-1) = -4$, $P(0) = -1$, $P(1) = 2$, **b)** $P(-1) = 3\frac{11}{28}$, $P(0) = 1$, $P(1) = 4\frac{17}{28}$.

1.7. Zum Beispiel $P(x) = x(x - 5)(x - \sqrt{3})$. **1.8.** W(1), 1.

1.9. Die Zahl -1 ist Nullstelle des Polynoms.

1.10. Die Polynome V und U sind nicht gleich.

1.11. a) $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, **b)** $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$.

1.12. a) $a = -3$, $b = 1$, **b)** $a = 9$, $b = 2$.

1.13. a) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, **b)** $(\sqrt{3}x - \frac{1}{2})(\sqrt{3}x + \frac{1}{2})(3x^2 + \frac{1}{4})$, **c)** $(x - 3 - y)(x - 3 + y)$,

d) $x^3(x - 10)(x + 10)$.

1.14. a) $(x - 7)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, die Nullstellen: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 7,

b) $(x + 4)(x - 1)(x + 1)$, die Nullstellen: -4, -1, 1,

c) $6x(x - 5)(\sqrt{5} - 2x)(\sqrt{5} + 2x)$, die Nullstellen: $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 5.

1.15. $(x^2 + 9 - 3\sqrt{2}x)(x^2 + 9 + 3\sqrt{2}x)$.

1.16. $(x^4 + 4)(x - 1)(x + 1)$, die Nullstellen: -1, 1. **1.17.** $m = 3$ oder $m = -2^1/_2$.

1.19. $a = 2$, $b = -14$, $c = 4$, $d = 80$. **1.20.** $m = -1$ oder $m = \frac{7}{6}$.

1.21. a) $a = -3$, $b = -2$, **b)** $a = 1$, $b = -2$, **c)** -7. **1.22.** $a_3 = 2$.

1.23. a) nein, **b)** ja, **c)** ja, **d)** nein. **1.24. a)** -2, 1, **b)** keine Lösung, **c)** -2, 2.

1.25. a) -3, 1, 2, **b)** 1, **c)** -1, $-\frac{1}{4}$. **1.26. a)** 1, **b)** -4, -1, 1, **c)** -4, -2, 4.

1.27. -4. **1.28.** $m = -2$, die anderen Lösungen: $-\frac{7}{2}$, 1.

1.29. $m = -3$, $n = 12$, die dritte Lösung: -2.

Das Horner - Schema

	1	0	9	0	2	5
-3	1	-3	0	0	2	-1

$(x^5 - 9x^3 + 2x + 5) : (x + 3) = x^4 - 3x^3 + 2$
Rest -1

2. Gebrochenrationale Funktionen

2.1. a) $D_f = R\setminus\{-3\}$, **b)** $x_0 = -4$, **c)** $P_1 = (-4,0)$, $P_2 = \left(0,-\frac{4}{3}\right)$,

d) waagerechte Asymptote: $y=-1$, senkrechte Asymptote: $x=-3$,

f) Punktsymmetrisch zum Punkt: $S=(-3,-1)$, symmetrisch zur Geraden: $y = x+2$ und $y=-x-4$, **g)** $W_f = R\setminus\{-1\}$, **h)** steigt: $x\in(-\infty;-3), x\in(-3;+\infty)$ **i)** $x\in(-4,-3)$

j) $x\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$ **k)** nicht, $f(10) = -\frac{14}{13}$.

2.2. a) $D_f = R\setminus\{-1\}$, **b)** $x_0 = \frac{3}{2}$, **c)** $P_1 = \left(\frac{3}{2},0\right)$, $P_2 = (0,-3)$,

d) waagerechte Asymptote: $y=2$, senkrechte Asymptote: $x=-1$,

f) Punktsymmetrisch zum Punkt: $S=(-1,\ 2)$, symmetrisch zur Geraden: $y=x+3$ und $y=-x+1$, **g)** $W_f = R\setminus\{2\}$, **h)** steigt: $x\in(-\infty;-1), x\in(-1;+\infty)$,

i) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, **j)** $x\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$, **k)** nicht, $g(10)=\frac{17}{11}$.

2.3. a) $D_f = R\setminus\{2\}$, **b)** $x_0 = 1$, **c)** $P_1=(1,0)$, $P_2 = \left(0,-\frac{3}{2}\right)$,

d) waagerechte Asymptote: $y=-3$, senkrechte Asymptote: $x=2$,

f) Punktsymmetrisch zum Punkt: $S=\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, symmetrisch zur Geraden: $y = x-\frac{5}{2}$, $y=-x-\frac{1}{2}$, **g)** $W_f = R\setminus\{-3\}$, **h)** steigt: $x\in(-\infty;2), x\in(2;+\infty)$,

i) $x\in(1,\ 2)$, **j)** $x\in(1;\ 2)\cup(2;+\infty)$, **k)** nicht, .

2.4. a) $f(x)=\frac{-x+3}{x-2}$, **b)** $f(x)=\frac{2x+8}{x+3}$, **c)** $f(x)=\frac{-2x+4}{x-1}$, **d)** $f(x)=\frac{-x+3}{x+2}$,

e) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, **f)** $f(x)=\frac{x-5}{x-3}$. **2.5. a)** F, **b)** R, **c)** F, **d)** F, **e)** F, **f)** F, **g)** R, **h)** F, **i)** R, **j)** R, **k)** R, **l)** R, **m)** R, **n)** R, **o)** F.

2.6. a) C, C, **b)** C, B, **c)** C, D, **d)** C, C, , **e)** D, C.

2.7. a) $f(x)=\frac{1}{x+2}+3$, $\boldsymbol{C}$, **b)** $f(x)=-\frac{1}{x-4}+2$, $\boldsymbol{C}$,

c) $f(x)=-\frac{1}{x-3}-2$, $\boldsymbol{D}$, **d)** $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$, $\boldsymbol{D}$.

2.8. a) $x=2$, **b)** $x=1$, $x=6$, **c)** $x=-\frac{1}{3}$, $x=1$, **d)** $x=-1$, **e)** $x=3$.

2.9. $1-E$, $2-C$, $3-B$, $4-A$, $5-D$. **2.10.** $\frac{5}{15}$ **2.11.** $\frac{5}{8}$ **2.12.** 2 oder 5 **2.13.** $\frac{1}{3}$

2.14. $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{15}$ **2.15.** $\frac{6}{10}$ **2.16.** $2\frac{2}{3}$ **2.17. a)** 26 **b)** 12 €

2.18. a) 15 **b)** 9 € **2.19.** 12 Tage **2.20.** 12 Tage **2.21.** 4 Tage

2.22. 6 Tage **2.23.** in 8 Minuten **2.24.** in 10 Minuten und in 15 Minuten

3. Trigonometrische Funktionen

3.1.

	Seite mit der Länge a	Seite mit der Länge b	Seite mit der Länge c
Winkel α	Gegenkathete	Ankathete	Hypotenuse
Winkel β	Ankathete	Gegenkathete	Hypotenuse

3.2. $\sin\alpha = \dfrac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$, $\cos\alpha = \dfrac{Ankathete}{Hypotenuse}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{Gegenkathete}{Ankathete}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{Ankathete}{Gegenkathete}$.

3.4. a) $\alpha \approx 37^\circ$, $ß \approx 53^\circ$, **b)** $\alpha \approx 27^\circ$, $ß \approx 63^\circ$, **c)** $\alpha \approx 45^\circ$, $ß \approx 45^\circ$.

3.5. a) 6 LE, **b)** 10 LE, **3.7.** 27°, 63°, **3.10.** 2,8 cm, 10,41 cm, 10,79 cm.

3.11. a) 10, $2\sqrt{34}$, 31°, 59°, **b)** 3,17; 3,78, 40°, **c)** 3, 8, 21°, 69°.

3.12. $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.

3.14. a) falsch, **b)** richtig, **c)** richtig, **d)** richtig. **3.15.** 8,03 cm; 5,73 cm.

3.16. 28°, 76°, 76°. **3.17.** $c \approx 13{,}52$ cm, $\alpha = 65^\circ$. **3.18.** $P \approx 33{,}18\ \text{cm}^2$.

3.20. $4\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm. **3.21.** $75\sqrt{2}$. **3.22.** $a \approx 215$ cm, $d_1 \approx 215$ cm, $d_2 \approx 372$ cm.

3.23. a) $2\sqrt{5}$ cm. $4\sqrt{5}$ cm, **b)** 5 cm, **c)** 54°, 126°. **3.24.** 2,54 cm; 5,44 cm.

3.25. $84 + 6\sqrt{3}$. **3.26.** $|AB| = |AD| \approx 15{,}28$ cm, $|BD| \approx 9{,}82$ cm, $|BC| = |CD| = 12{,}82$ cm.

3.27. a) 53°, 127°, 53°, 127°, **b)** 60°, 120°, 120°, 60°, **c)** 53°, 127°, 90°, 90°.

3.28. $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{h}{\frac{1}{2}a}$, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{\frac{1}{2}a}$, $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **3.29.** $\alpha \approx 10$ cm. **3.30. a)** $6\sqrt{3}$, **b)** $10\sqrt{3}$.

3.31. $s \approx 11{,}28$. **3.32.** 4°. **3.33.** 15%, $\alpha \approx 9^\circ$, **3.34.** $h \approx 639$ m, $e \approx 16$ km, $\alpha \approx 2^\circ$.

3.35. $h \approx 53{,}58$ m. **3.36.** $e \approx 31$ m. **3.37.** $h \approx 29$ m. **3.38.** $f \approx 113$ m. **3.39.** 344 g.

3.40. $e \approx 272$ m. **3.41.** $h \approx 125$ m. **3.42.** 3,55 m. **3.43.** 2,74 m. **3.44.** 873 m.

3.46. a) nein, **b)** ja, **3.47.** 45°.

3.48. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{15}$. **3.49.** $\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{74}}{74}$, $\cos\alpha = \dfrac{7\sqrt{74}}{74}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{7}{5}$.

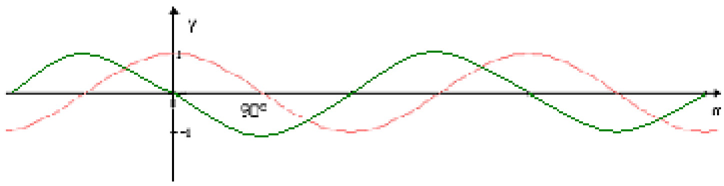
3.50. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **3.52. a)** $\dfrac{2+5\sqrt{7}}{18}$, **b)** $\dfrac{2\sqrt{35}+7\sqrt{5}}{105}$.

3.53. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **3.54. a)** $\sin\alpha$, **b)** $\cos\alpha$, **c)** $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

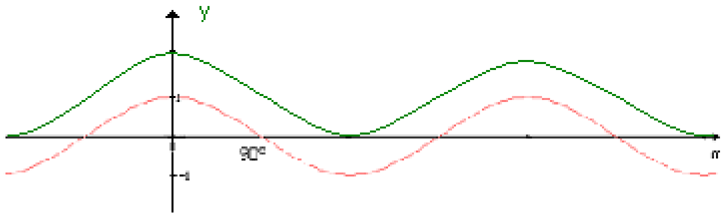
Test

3.55. a) $<0^\circ, 360^\circ>$, **b)** $<-1, 1>$, **c)** $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$, **d)** $<90^\circ, 270^\circ>$, **e)** $<0^\circ, 90^\circ>, <270^\circ, 360^\circ>$, **f)** $(0^\circ, 180^\circ)$, **g)** $y_{min} = -1$, $y_{max} = 1$.

3.56. a)



b)



3.57. a) 5 und 6, **b)** $\sqrt{61}$, **c)** $\sin\alpha\ \dfrac{5\sqrt{61}}{61}$, $\cos\alpha = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{6}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{6}{5}$, **d)** $P = 15$.

3.58. a) $\sin 50^\circ \approx 0{,}766$, $\cos 50^\circ \approx 0{,}6428$, $\mathrm{tg}\, 50^\circ \approx 1{,}1918$, $\mathrm{ctg}\, 50^\circ \approx 0{,}8391$, **b)** 6,53 cm, **c)** $P \approx 29{,}5$ cm^2.

3.59. $\dfrac{99}{125}$.

3.60. a) $P = (6, 2)$, **b)** $S = (6, 0)$, **c)** $|OP| = 2\sqrt{10}$, **d)** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3$.

3.62. a) $3\sqrt{5}$ cm, **b)** 27°, 63°, **c)** 54°

3.63. $4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ cm, $4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ cm

3.64. $144\sqrt{3}$ cm^2 oder $48\sqrt{3}$ cm^2

3.65. a) $3\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm, **b)** 3 cm^2, **c)** $\sqrt{5}$ cm, **d)** $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$cm

3.66. a) 48 cm, **b)** 96 cm^2, **c)** 10 cm, **d)** 4 cm

3.67. **a)** $30\,\text{cm}$, **b)** $6{,}5\ \text{cm}$, **c)** $2\ \text{cm}$

3.68. **a)** $2\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\text{cm}$ **b)** $2\left(2+2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$ **c)** $2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $2\left(\sqrt{3}+1\right)\text{cm}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\text{cm}$

3.69. **a)** $20\sqrt{2}-20$ cm, $40-20\sqrt{2}$ cm, **b)** $10\sqrt{2}-10$ cm

3.70. **a)** 36 cm, **b)** $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

3.71. **a)** $32\sqrt{2}\ \text{cm}^2$, **b)** $32\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm

3.72. **a)** $108\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2$,**b)** 1%, $\dfrac{P_{24}}{P_o}=\dfrac{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\pi}\approx 0{,}989$

3.73. **a)** $40\sqrt{2}$ cm, **b)** $100\sqrt{2}\ \text{cm}^2$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}+1$

3.74. **a)** $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **b)** $2\sqrt{7}$ cm, $2\sqrt{31}$ cm

3.75. **a)** $40\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **b)** $2\sqrt{21}$ cm, $2\sqrt{61}$ cm

3.76. **a)** 28 cm, **b)** $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **c)** $4\sqrt{3}$ cm, $4\sqrt{7}$ cm

3.77. **a)** $32\ \text{cm}^2$, **b)** $8\left(\sqrt{2}+2\right)\text{cm}$, **c)** $4\sqrt{10}\,\text{cm}$, $4\sqrt{2}\,\text{cm}$

3.78. **a)** $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **b)** $6\sqrt{3}$ cm

3.79. **a)** $12\sqrt{2}+8\sqrt{3}$ cm , **b)** $6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

3.80. **a)** $3\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm , **b)** $24\left(\sqrt{3}-1\right)\ \text{cm}^2$, **c)** $10+6\sqrt{3}+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ cm

3.81. **a)** 16 cm, **b)** $44\sqrt{6}\ \text{cm}^2$, **c)** 11 cm, 44 cm

3.82. **a)** $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm , **b)** $22+6\sqrt{5}$ cm

3.83. **a)** $2\sqrt{6}$ cm, **b)** $40\sqrt{6}\ \text{cm}^2$, **c)** $\dfrac{35\sqrt{6}}{12}$ cm

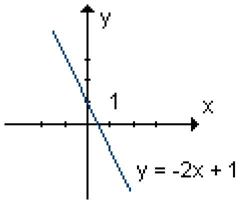
3.84. $50\sqrt{3}+1{,}5\ \text{m}\approx 88{,}10\ \text{m}$

3.85. **a)** $20\sqrt{3}\ \text{m}\approx 34{,}64\ \text{m}$, **b)** 80 m

3.86. **a)** $10\left(\sqrt{3}+1\right)\ \text{m}\approx 27{,}32\ \text{m}$, **b)** $10\left(3+\sqrt{3}\right)\ \text{m}\approx 47{,}32\ \text{m}$

4.Geometrie

4.1.



4.2. a) y = x - 4, **b)** $\alpha = 45^{o}$, **c)** y < 8. **4.3. a)** $S_{AB} = (1, 2)$, **b)** $A = (-3, 3)$. **4.4.** y = 2x – 9.

4.5. a) (3, 0), (0, 3), **b)** (1, 0), (4, 0), (0; 2), **c)** $(4 - 2\sqrt{5}, 0)$, $(4 + 2\sqrt{5}, 0)$, $(0, 4 - 2\sqrt{5})$, $(0, 4 + 2\sqrt{5})$. **4.6.** $m = 2\frac{3}{4}$. **4.7.** $y = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$. **4.8.** 2. **4.9.** y = -2x + 11.

4.10. $y = -\frac{3}{2}x + 6$. **4.11.** $y = -2x + 8\frac{1}{2}$. **4.12.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}$. **4.13.** $a = -1$.

4.14. y = 4x + 0,5. **4.15.** $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, kleiner. **4.16.** $p \in (-4, -2)$. **4.17.** $k = \frac{-1-\sqrt{55}}{3}$.

4.18. a) (0, 3), **b)** $m = 0$. **4.19.** $(3 - 2\sqrt{6}, 0)$, $(3 + 2\sqrt{6}, 0)$. **4.20.** $5\sqrt{2}$.

4.21. $\frac{\sqrt{405}}{5}$. **4.22. a)** $a = \frac{1}{3}$, **b)** $2\sqrt{10}$. **4.23.** $k = -1 \vee k = 1$. **4.24.** $m \in (-2{,}2; -0{,}2)$.

4.25. $a = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **4.26.** (1, 5), (7, 2). **4.27.** $C = (1, -2)$.

4.28. $|AB| = 7$, $|AC| = 5$, $|BC| = 3\sqrt{2}$, $S_{AB} = (0; 3{,}5)$, $S_{AC} = (1{,}5; 2)$, $S_{BC} = (1{,}5; 5{,}5)$.

4.29. y = -x + 9, (5, 4). **4.30.** $|AC| = |BC| = \sqrt{41}$, $|CD| = 5$,.

4.31. a) $|AB| < |AC| + |BC|$, $|AC| < |AB| + |BC|$, $|BC| < |AB| + |AC|$, **b)** $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

4.32. a) $|CD| = \frac{4\sqrt{10}}{5}$, **b)** $P = 4$. **4.33. a)** (5, 5), (7, 3), (-1, -1), **b)** $P_{\Delta ABC} = 12$, **c)** y = x.

4.34. a) y = x, **b)** y = 3x – 4. **4.35.** $(4 - \sqrt{13}, 2)$, $(4 + \sqrt{13}, 2)$. **4.36.** $14 + 4\sqrt{10}$.

4.37. $P = (0, 2)$, $P_{\Delta ABP} = 10$. **4.38.** $P_{\Delta ABS} = 21$. **4.39.** P = 24. **4.40.** $P = 12$.

4.41. a) y = 2x, y = -4, **b)** (1, 2), (-2, -4), (5, -4), (8, 2). **4.42.** $P = 15$. **4.43.** 4,8.

4.44. $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = |BD| = 2\sqrt{10}$.

4.45. a) $S = (3, -3)$, $r = 3\sqrt{2}$, **b)** $S = (1, -3)$, r = 4, **c)** $S = (0,4)$, r = 4.

4.46. a) kein Kreis, **b)** $S = (-4, -2)$, r = 3, **c)** $S = (3, 0)$, r = 6.

4.47. a) $r = 2\sqrt{5}$, $x^2 + y^2 = 20$, **b)** r = 5, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$, **c)** r = 5, $x^2 + (y - 5)^2 = 25$.

4.48. a) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$,

b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$, **c)** $x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

4.49. P = 4. **4.50.** ähnlichen, Winkel, Längenverhältniss, Ähnlichkeitmaßstab, Flächeninhalt.

4.51. a) nein, **b)** ja, **c)** ja, **d.** nein, **e.** nein, **f.** ja. **4.52.** $\frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. **4.53.** $P_A = 4$ cm^2.

4.54. 15. **4.55. a)** 3 : 4 : 6, **b)** 3 : 4 : 6, **c)** 9 : 16 : 36. **4.56.** 7,5 cm.

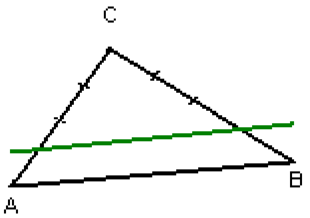
4.57. $P_{A'B'C'D'} = 16$ cm^2. **4.59.** $P = 200$ cm^2, $U = (20\sqrt{2} + 8\sqrt{13})$ cm. **4.60.** 16 cm^2, 36 cm^2.

4.61. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** 118,92 cm x 84,09 cm, **c)** A4: 29,73 cm x 21,02 cm,

A5: 21,02 cm x 14,86 cm, A6: 14,86 cm x 10,51 cm. **4.62.** 54,4 cm x 40,8 cm.

4.63. a) SSS, **b)** WSW.

4.64.



4.65. $\frac{9}{16}$.

4.66. a) 25, **b)** $\frac{3}{5} \neq \frac{3}{4}$, nein. **4.67.** h = 6. **4.68.** 48,75 m. **4.69.** $\approx$3430 km.

4.70. 20,8 m. **4.71.** 150 000 m^2, 0,15 km^2.

5. Folgen

5.1. a) H, **b)** G, **c)** F, **d)** A, **e)** M, **f)** N, **g)** E.

5.2. $a_1 = -5$, $a_2 = -3$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$.

5.3. a) R, **b)** R, **c)** R, **d)** F, **e)** R.

5.4. (1) L, **(2)** J, **(3)** C, **(4)** A, **(5)** B, **(6)** O, **(7)** D, **(8)** F.

5.5. a) A, I, G, **b)** B, I, H, **c)** F **d)** E, K, I, H.

5.6. a) D, A, **b)** C, D, **c)** D, **d)** C. **5.7. a)** $5{,}5$ €, **b)** $8{,}7$ €, **c)** $(1{,}5 + 0{,}2 \cdot x)$ €.

5.8. a) $a_1 = 8$, $r = 6$, **b)** $a_n = 6n + 2$ **c)** $a_{10} = 62$.

5.9. a) $a_1 = 2\frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{4}$, **b)** $a_n = \frac{1}{4} \cdot n + 2$, **c)** $a_{12} = 5$.

5.10. a) 85 €, **b)** $(5n + 35)$ €. **5.11. a)** $10{,}20$ € **b)** $10{,}00 + 0{,}02 \cdot n$

5.12. 5, 3, 1. **5.13.** 3, 1, -1. **5.14. a)** 14 €, **b)** 18 €. **5.15. a)** $a_6 = 22$, **b)** $S_6 = 87$.

5.16. a) 9 **b)** $S_9 = 36$. **5.17. a)** $a_1 = -2$, $r = 4$, **b)** $a_n = 4n - 6$ **c)** $a_7 = 22$, **d)** $S_7 = 70$.

5.18. a) $a_{10} = 40$, **b)** 2, $(a_3,\ a_4)$, **c)** 6, $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$.

5.19. a) 90, **b)** $S_{90} = 4905$. **5.20.** 2430. **5.21.** 2475. **5.22.** 616. **5.23.** 8, $S_8 = 432$.

5.24. 1470. **5.25.** 33, $S_{33} = 1683$. **5.26.** 1617. **5.27.** 156.

5.28. a) $a_8 = 51$, **b)** $S_8 = 324$. **5.29. a)** $a_{16} = 54$, **b)** $S_{16} = 624$. **5.30.** 450.

5.31. a) $a_{20} = 63$, **b)** $S_{20} = 880$. **5.32. a)** $S_{18} = 981$, **b)** $a_{16} = 74$.

5.33. a) $a_6 = 96$, **b)** $a_n = 1{,}5 \cdot 2^n$. **5.34. a)** $a_3 = 24$, **b)** $3 \cdot 2^{12} = 12288$, **c)** $a_n = 3 \cdot 2^n$.

5.35. 4 Tage.

5.36. a) $a_{15} = 0{,}1 \cdot 2^{15}\,[\mathrm{mm}] = 3276{,}8\,[\mathrm{mm}] = 3{,}2768\,[\mathrm{km}]$, **b)** $a_n = 0{,}1 \cdot 2^n\ [\mathrm{mm}]$.

5.37. a) $a_3 = 27$, **b)** $a_5 = 3^5 = 243$, **c)** 13-mal. **5.38. a)** $q = \frac{1}{3}$, **b)** $S_6 = 40\frac{4}{9}$.

5.39. a) $a_1 = 1$, $q = 2$, **b)** $a_n = 2^{n-1}$, **c)** $S_6 = 63$.

5.40. a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ q = -2 \end{cases}$, **b)** $a_n = 2^{n-3} \vee a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-3}$,

c) $S_8 = 63{,}75 \vee S_8 = 21{,}25$.

5.41. a) 6, 12, 24, $\vee$ -6, 12, -24, **b)** $S_5 = 93 \vee S_5 = 33$.

5.42. a) 2, 4, 8, 16, **b)** $S_6 = 63$.

5.43. a) $a_n = 2^{n+1}$, **b)** $n = 6$, **c)** $S_6 = 252$.

5.44. a) $a_n = (-2)^{n-1}$, **b)** $n = 9$, **c)** $S_9 = 171$.

5.45. a) $31,25$ €, **b)** $1968,75$ €.

5.46. a) $a_{20}=-285$, **b)** $3,\left(a_2,\ a_3,\ a_4\right)$, **c)** $3,\ \left(a_2,\ a_3,\ a_4\right)$.

5.47. a) 18, **b)** $S_{18}=945$. **5.48.** 825. **5.49.** 24.

5.50. a) $a_1=7,\ r=3$, **b)** $a_n=3n+4$, **c)** $S_7=112$.

5.51. a) $a_1=-2,\ r=2$, **b)** $a_n=2n-4$, **c)** $S_{10}=70$.

5.52. a) $a_n=5n+95$, **b)** $a_{15}=170$, **c)** $S_{15}=2025$.

5.53. der erste 300 €, der letzte 750 €. **5.54. a)** 15 cm, 20 cm, **b)** 150 cm^2.

5.55. a) 6 cm, 8 cm, 10 cm, **b)** 24 cm^2. **5.56. a)** 30 cm, 40 cm, 50 cm, **b)** 600 cm^2.

5.57. a) 15 cm, 20 cm, **b)** 300 cm^2. **5.58. a)** 9 cm, 12 cm, **b)** 42 cm.

5.59. $45^\circ,\ 60^\circ$. **5.60. a)** 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm, **b)** $3\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm, $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

5.61. a) 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm, 4 cm, **b)** $2\sqrt{3}$ cm^2.

5.62. a) $b=4,\ c=6$, **b)** $f\left(x\right)=2x^2+4x+6,\ f\left(x\right)=2\left(x+1\right)^2+4$

5.63. a) $a=1,\ b=3,\ c=5$, **b)** 3.

5.64. a) $\begin{cases} a_1=2 \\ q=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1=54 \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases}$, **b)** $a_n=2\cdot 3^{n-1} \vee a_n=54\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, **c)** $S_n=26 \vee S_n=78$.

5.65. a) $\begin{cases} a_1=1 \\ q=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1=-27 \\ q=\dfrac{1}{3} \end{cases}$, **b)** $a_n=3^{n-1} \vee a_n=-27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, **c)** $S_n=13 \vee S_n=-39$.

5.66. $q=\dfrac{1}{3} \vee q=-\dfrac{4}{3}$. **5.67. a)** 75 cm, **b)** $132\dfrac{13}{16}$ cm^2.

5.68. a) $30\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm, **b)** $187\dfrac{1}{2}$ cm^2. **5.69. a)** $58\dfrac{1}{8}$, **b)** $\dfrac{100}{3}\sqrt{3}\left(1-\dfrac{1}{4^5}\right)=33\dfrac{75}{256}\sqrt{3}$.

5.70. 1, 2, 3 oder 4, 2, 0. **5.71.** 5, 9, 13 oder 17, 9, 1. **5.72.** 1, 2, 4 oder 4, 2, 1.

5.73. 2, 6, 18 oder 18, 6, 2. **5.74.** 6, 12, 24 oder 24, 12, 6.

5.75. 4, 1, 3 oder 8, 9, -9.

5.76. a) $50\cdot 1,05^7=70,355\approx 70,36$ €, **b)** $1000\left(1,05^8-1\right)=477,455\approx 477,46$ €.

5.77. a) $20\left(1-\dfrac{1}{2^5}\right)=19\dfrac{3}{8}$ cm, **b)** $\dfrac{100}{3}\left(4-\dfrac{1}{4^4}\right)=133\dfrac{13}{64}$ cm^2.

5.78. a) $\left(0,7\right)^6\approx 0,12$ m, **b)** $\dfrac{17}{3}-\dfrac{14}{3}\cdot\left(0,7\right)^6\approx 5,12$ m.

5.79. 2400 €, 1200 €, 600 €, 300 €, 150 €. **5.80.** 5, 2000 €, 1000 €, 500 €, 250 €, 125 €.

6. Finanzmathematik

6.1

a) C **b)** D **c)** B, A **d)** B, C
e) C **f)** B **g)** A **h)** A

6.2 $15,76\%$ **6.3** $0,32\%$ **6.4** $19,09\%$ **6.5** $31,03\%$ **6.6** $400\,€$

6.7 $10\ 225\,€$ **6.8** $225\,€$ **6.9** $400\,€$ **6.10** $40\ 000\,€$

6.11 $50\ 000\,€$ **6.12** $13,5\%$ **6.13** $7\ 000\,€$

6.14 $750\,€$

6.15 a) $1000\cdot(1,08)^5=1\ 469,33$ **b)** $1000\cdot(1,08)^{10}=2\ 158,92$ **c)** $1000\cdot(1,08)^{20}=46\ 609,57$

6.16 $10\ 000\,€$

6.17 Helga: $2000\cdot(1,05)^6=2\ 431,01\,€$ Peter: $2200\cdot(1,05)^4=2\ 674,11\,€$

Peter mehr um 243,10 €

6.18 a) Mann: $1100\cdot(1,03)^7=1352,86\,€$ Frau: $1000\cdot(1,04)^7=1315,93\,€$ **b)** nach 10 Jahren

6.19 10%

6.20 a) $19,22\%$ **b)** $1192,24\,€$

6.21 a) GS: 19,33% GG: 19,69%

b) GS: $11\ 933,68\,€$ GG: $11\ 968,95\,€$ mehr GG um $35,27\,€$ **c)** $3,659\%$

6.22 a) $\frac{100}{105}$ **b)** $\frac{100}{106}$ **c)** $\frac{100}{110}$ **6.23 a)** $1000\cdot\frac{100}{102}=980,39\,€$ **b)** $1000\cdot\left(\frac{100}{102}\right)^2=961,17\,€$

6.24 a) $\left(\frac{100}{110}\right)^2=\frac{100}{121}$ **b)** $\left(\frac{100}{110}\right)^5=0,6209$ **c)** $\left(\frac{100}{110}\right)^{10}=0,3855$

6.25 a) $1000\cdot\frac{100}{104}=961,54\,€$ **b)** $1000\cdot\left(\frac{100}{104}\right)^2=924,56\,€$ **c)** $1000\cdot\left(\frac{100}{104}\right)^3=888,99\,€$

6.26 $21,52\%$ **6.27** $30,61\%$ **6.28** $45,96\%$

6.29 nach 8 Jahren

6.30 $1\cdot(1,03)^{2007}=5,81\cdot10^{25}\,€$

6.31 $1\ 000\,€$

6.32 13%

6.33 a) $100\ 000\cdot(1,02)^{10}=121\ 899\approx122\ 000$ **b)** $100\ 000\cdot(1,02)^{20}=148\ 595\approx149\ 000$

c) in 35 Jahren

6.34 a) $40\cdot10^6\cdot(1,01)^{10}=44\ 184\ 885\approx44\ 185\ 000$

b) $40\cdot10^6\cdot(1,02)^{10}=48\ 759\ 777\approx48\ 760\ 000$

6.35 a) 1% **b)** nach 70 Jahren

6.36 a) $\frac{3}{2}\cdot\left(3^{10}-1\right)=88\ 572$ **b)** $\frac{3}{2}\cdot\left(3^n-1\right)$ **c)** nach 6 Stunden: 1092 Personen

6.37 a) $100\cdot(1,20)^2=144$

b) $100\cdot(1,20)^8=430$

c) $f(n)=100\cdot(1,20)^{4n}$

d) nach $3\frac{1}{4}$ Stunden

7. Anhang nr.1

a) $a_{13} = 2^{12} = 4096, \; a_{20} = 2^{19} = 524288, \; a_{64} = 2^{63} = 9,22 \cdot 10^{18},$

b) $S_{64} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{63} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$

c) $2^{64} - 1$

d) $9,223 \cdot 10^{11}$ t

e) $2305,8$ km^3

f) $3,48 \cdot 10^{10}$

g) $3,13 \cdot 10^{8}$ km

h) $8,54 \cdot 10^{11}$ Jahre

9. Fachwortschatz

A

Abmessung *die*; –; *nur Sg* **-** wymiary
abnehmen, nahm ab, *hat* abgenommen - ubywać, zmniejszać
Abstand *der*; -(*e*)*s*; *Abstände* - odległość
Abszisse *die*; *–; -en* - odcięta
Abweichung *die*; –, *-en* - odchylenie
    prozentuale Abweichung - odchylenie podane w procentach
Achse *die*; –, *-n* - oś
    Abszissenachse - oś odciętych (oś *x*)
    Koordinatenachse - oś układu współrzędnych
    Ordinatenachse - oś rzędnych (oś *y*)
    Symmetrieachse - oś symetrii
Achsenkreuz *das*; *-es*; *-e* - układ współrzędnych
Achsensymmetrie *die*; –, *-n* - symetria osiowa
achsensymmetrisch - osiowosymetryczny
    achsensymmetrisch zu den beiden Winkelhalbierenden - osiowo symetryczny względem obu dwusiecznych (układu współrzędnych)
    punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - środkowo symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
Achteck *das*; *-s*, *-e* - ośmiokąt
    ein regelmäßiges Achteck - ośmiokąt foremny
addieren; addierte; *hat* addiert - dodawać
ähnlich - podobny
    ähnliche Dreiecke - trójkąty podobne
Ähnlichkeit *die*; −, *-en* - podobieństwo
    Ähnlichkeitsfaktor *der* - skala podobieństwa
    Ähnlichkeitsmaßstab *der* **-** skala podobieństwa
    Ähnlichkeitssatz *der*; *-es*; *Sätze* - cechy przystawania
allgemeine Form - postać ogólna
    allgemeine Form der Geradengleichung - ogólna postać równania prostej
alternieren, alternierte, *hat* alterniert - przemieniać
    etwas alterniert mit etwas - coś przemienia się z czymś
analytische - analityczna
    analytische Geometrie - geometria analityczna
Anfangsglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz początkowy (Np. początkowy czyli pierwszy wyraz ciągu)
Ankathete *die*; –; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym przy kącie
Argument *das*; *-es; -e* - argument
Ast *der*; -(*e*)*s*, *Äste* - gałąź
    Äste der Hyperbel - gałęzie hiperboli
Asymptote *die*; –, *-n* - asymptota
    Gleichung der senkrechten Asymptote - równanie asymptoty pionowej
    Gleichung der waagerechten Asymptote - równanie asymptoty poziomej
    schiefe / schräge Asymptote - asymptota ukośna / pochyła
    senkrechte Asymptote - asymptota pionowa
    waagerechte Asymptote - asymptota pozioma

aufzählen, zählte auf, *hat* aufgezählt - wyliczać, wyliczyć
Ausdruck *der*; -(*e*)*s*; *Ausdrücke* - wyrażenie
Ausgangsbruchgleichung *die*; -, *-en* - równanie wymierne początkowe
ausklammern, klammerte aus, *hat* ausgeklammert - wyłączyć przed nawias

B

Basis *die*; −, *Basen* - podstawa
  Basis einer Potenz - podstawa potęgi
  Basis eines Dreiecks - podstawa trójkąta
Beschreibung *die*; –, *-en* - opis, opisanie
  rekursive Beschreibung - postać rekurencyjna (ciągu)
Betrag *der*; *-s*, *Beträge* - suma, kwota, *mat*. wartość bezwzględna
  Betrag einer Zahl - wartość bezwzględna liczby
  Betrag eines Vektors - moduł wektora
Binom *das*; *-s*, *-e* - dwumian
Bogenmaß *das* - miara łukowa kąta (w radianach)
Bogen *er; -s, - / Bögen* - łuk, arkusz (papieru)
  Kreisbogen - łuk koła
Bruch *der*; -(*e*)*s*, *Brüche* - ułamek
  Bruchgleichung - równanie wymierne
  Bruchstrich - kreska ułamkowa
  Bruchterm - wyrażenie wymierne
  Doppelbruch - ułamek piętrowy
  echter Bruch - ułamek właściwy
  gleichnamige Brüche - ułamki o tym samym mianowniku
  Kehrbruch - ułamek odwrotny
  Stammbruch - ułamek prosty (o liczniku 1)
  unechter Bruch - ułamek niewłaściwy
Bruchterm *der*; *-s*, *-e* - wyrażenie wymierne
binomische Formeln *Pl* - wzory skróconego mnożenia
Bruchgleichung *die*; –; *-en* - równanie wymierne

D

Darstellung *die*; –, *-en* - przedstawienie
  rekursive Darstellung - postać rekurencyjna (ciągu)
deckungsgleich - przystający
Definitionsbereich *der*; -(*e*)*s*; *-e* - dziedzina
Definitionsmenge *die*; –; *-n* - dziedzina
Diagonale *die*; –; *-n* - przekątna
Differenz *die*; –, *-en* - różnica
  Differenz der arithmetischen Folge - różnica ciągu arytmetycznego
dividieren; dividierte; *hat* dividiert - dzielić
doppelt - podwójny

Doppelte *das* - dwukrotność

Drachen *der*; *-s*, − - latawiec, lotnia

Drachenviereck *das*; *-s*, *-e* - deltoid

Dreieck *das; -s; -e* - trójkąt
    ähnliche Dreiecke - trójkąty podobne
    beliebiges Dreieck - dowolny trójkąt
    gleichschenkliges Dreieck - trójkąt równoramienny
    gleichseitiges Dreieck - trójkąt równoboczny
    kongruente Dreiecke - trójkąty przystające
    rechtwinkliges Dreieck - trójkąt prostokątny
    spitzwinkliges Dreieck - trójkąt ostrokątny
    stumpfwinkliges Dreieck - trójkąt rozwartokątny

Dreieckspyramide *die*; −, *-n* - ostrosłup trójkątny
Durchmesser *der*; *-s*; - - średnica

Durchschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - średnia, przeciętna
    Durchschnitt = arithmetisches Mittel - średnia arytmetyczna
    Durchschnitt, Schnittmenge, Durchschnittsmenge - iloczyn zbiorów

E

Eckpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wierzchołek
    Eckpunkt des Dreiecks - wierzchołek trójkata
Element *das*; -(*e*)*s*; *-e* - element
Endglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz ostatni (Np. ostatni wyraz ciągu)
Endpunkt *der; -(e)s; -e* - koniec
    Endpunkt einer Strecke - koniec odcinka
Exponent *der, -en, -en* - wykładnik potęgi
Exponentenschreibweise *die* **-** notacja wykładnicza
Exponentialdarstellung *die* **-** notacja wykładnicza
Exponentialfunktion *die*; –, *-en* - funkcja wykładnicza
Exponentialkurve *die*; –, *-n* - krzywa wykładnicza

F

Faktor *der*; *-s*; *-en* - czynnik
faktorisieren, faktorisierte, *hat* faktorisiert **-** rozkładać na czynniki
Festgeld *das* **-** lokata w banku, czyli pieniądze złożone w banku na określony czas np. miesiąc, trzy miesiące, pół roku, lokata terminowa, która ma z reguły wyższe oprocentowanie niż pieniądze na koncie
Flächeninhalt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - pole powierzchni
Folge *die*; -, *-n* - ciąg
    abnehmende Folge - ciąg malejący
    alternierende Folge - ciąg naprzemienny
    arithmetische Folge - ciąg arytmetyczny
    Folgenglied - wyraz ciągu
    geometrische Folge - ciąg geometryczny
    konstante Folge - ciąg stały
    Zahlenfolge - ciąg liczbowy
    zunehmende Folge - ciąg rosnący
Folgenglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz ciągu
Form *die*; –; *-en* - postać
    allgemeine Form einer Geradengleichung - ogólna postać równania prostej
    faktorisierte Form - postać iloczynowa

Funktion *die*; –; *-en* - funkcja
Exponentialfunktion - funkcja wykładnicza
fallende Funktion - funkcja malejąca
gebrochenlineare Funktion - funkcja homograficzna
gebrochenrationale Funktion - funkcja wymierna
gerade Funktion - funkcja parzysta
konstante Funktion - funkcja stała
Kosinusfunktion - funkcja cosinus
Kotangensfunktion - funkcja cotangens
lineare Funktion - funkcja liniowa
periodische Funktion - funkcja okresowa
Potenzfunktion - funkcja potęgowa
quadratische Funktion - funkcja kwadratowa
Sinusfunktion - funkcja sinus
steigende Funktion - funkcja rosnąca
streng monoton fallende Funktion - funkcja ściśle malejąca
streng monoton steigende Funktion - funkcja ściśle rosnąca
Tangensfunktion - funkcja tangens
trigonometrische Funktion - funkcja trygonometrychna
Umkehrfunktion - funkcja odwrotna
ungerade Funktion - funkcja nieparzysta
wachsende Funktion - funkcja rosnąca
Funktionsgleichung *die; –; -en* - wzór funkcji
Funktionsgraph *der*; *-en*, *-en* - wykres funkcji
Funktionswert *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wartość funkcji
Funktionswert der Funktion *f* an der Stelle x_0 **-** wartość funkcji *f* w punkcie x_0 $f(x_0)$

G

Gegenkathete *die*; –; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta prostego
Geometrie *die*; –; *nur Sg* - geometria
analytische Geometrie - geometria analityczna
Gleichung *die*; -, *-en* - równanie
Ausgangsbruchgleichung - równanie wymierne początkowe
Ausgangsgleichung - równanie początkowe
biquadratische Gleichung - równanie dwukwadratowe
Bruchgleichung - równanie wymierne
Gleichung einer Asymptote - równanie asymptoty
Gleichung ersten Grades - równanie stopnia pierwszego
Gleichung *n*-ten Grades - równanie stopnia n-*tego*
Gleichung zweiten Grades - równanie stopnia drugiego
Gleichung einer Geraden - równanie prostej
Gleichung eines Kreises - równanie okręgu
Polynomgleichung - równanie wielomianowe
Zweipunkteform einer Geradengleichung - równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Gleichungssystem - układ równań
Glied *das*; -(*e*)*s*, -*er* - wyraz
  allgemeines Glied - wyraz ogólny
  Anfangsglied -wyraz początkowy
  benachbartes Glied - wyraz sąsiedni
  Endglied - wyraz końcowy
  Folgenglied - wyraz ciągu
  Mittelglied - wyraz środkowy
  ***n*-tes Glied -** wyraz *n*-ty
Grad *der*; -(*e*)*s*; *Grade/Grad* - stopień
  Grad des Polynoms - stopień wielomianu
  Polynom ersten Grades - wielomian stopnia pierwszego
  Polynom vom Grad Null - wielomian stopnia zerowego
  Polynom zweiten Grades - wielomian stopnia drugiego
  Grundlinie *die*; –; -*n* - podstawa, np. trójkąta
Gradmaß *das* - miara kąta w stopniach
Graph *der*; -*en*, -*en* - wykres
  anhand des Graphen - na podstawie wykresu
  Graph der Funktion - wykres funkcji
  den Graphen der Funktion zeichnen - narysować wykres funkcji
Grundseite *die*; –; -*n* - podstawa, np. trójkąta

H

Halbmesser *der*; -*s;* – - promień okręgu, koła
Hauptnenner *der* **-** wspólny mianownik, będący najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników
  Hauptnenner ermitteln - ustalić (wyznaczyć) najmniejszy wspólny mianownik
Höhe *die*; –; -*n* - wysokość figury
Höhenschnittpunkt *der*; -(*e*)*s*; -*e* - punkt przecięcia wysokości w trójkącie
Hyperbel *die*, –, -*n* - hiperbola
  die Äste einer Hyperbel - gałęzie hiperboli
  die Zweige einer Hyperbel - gałęzie hiperboli
Hypotenuse *die*; –; -*n* - przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym

I

Inflation *die*; -, -*en*; *meist Sg* - inflacja
Inflationsrate *die* **-** stopa inflacji (wyrażana w procentach)
  monatliche Inflationsrate - miesięczna stopa inflacji (wyrażana w procentach)
  jährliche Inflationsrate - roczna stopa inflacji (wyrażana w procentach)
Inkreis *der; -es; -e* - okrąg wpisany
Inkreismittelpunkt *der; -(e)s; -e* - środek okręgu wpisanego
Inkreisradius *der*; –; -*radien* - promień okręgu wpisanego
Innenwinkel *der*; -*s*; – - kąt wewnętrzny
Intervall *das*; -*s*; -*e* - przedział

K

Kante *die*; −, *-n* - krawędź (bryły)
    Seitenkante - krawędź boczna (bryły)
Kapital *das, -s, -e / -ien meinst Sg* - kapitał
    Anfangskapital - kapitał początkowy
    Endkapital nach Ablauf von *n* Jahren - kapitał końcowy po upływie *n* lat
Kathete *die*; – ; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym
Kehrbruch *der*; -(*e*)*s, Kehrbrüche* - ułamek odwrotny
Kehrwert *der*, -(*e*)*s*, *-e* - wartość odwrotna
Kehrzahl *die*; -, *-en* - liczba odwrotna
Klammer *die; –; -n* - nawias
    eckige Klammer - nawias kwadratowy
    runde Klammer - nawias okrągły
Koeffizient *der*; *-en*; *-en* - współczynnik
    Koeffizient des Polynoms - współczynnik wielomianu
kongruent - przystający
Konstante *die* - stała
Koordinate *die*; –; *-n* - współrzędna
Koordinatensystem *das*; *-s*; *-e* - układ współrzędnych
Koordinatenursprung *der; -s; -ursprünge* - początek układu współrzędnych
Kosinus *der*; −, − / *-se*; *meist Sg* - cosinus
Kotangens *der*; –; – - cotangens
Kreis *der*; *-es*, *-e* - okrąg, koło
    ein Kreis mit dem Radius - okrąg (koło) o promieniu
    einem Kreis ist ein Vieleck einbeschrieben - czworokąt jest wpisany w okrąg
    Einheitskreis - okrąg o promieniu 1 (jednostkowym)
    Kreisbogen - łuk koła
    Gleichung eines Kreises - równanie okręgu
    Ungleichung eines Kreises - nierówność koła
Kreisabschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - odcinek koła
Kreisausschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - wycinek koła
Kreisbogen *der* **-** łuk okręgu
Kreisrandpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - punkt należący do okręgu
Krümmung *die*; –, *-en* - krzywizna
    Krümmung der Kurve - krzywizna krzywej
Kurve *die*; –, *-n* - krzywa
    Exponentialkurve - krzywa wykładnicza
    Kosinuskurve - cosinusoida
    Kotangenskurve - cotangensoida
    Kurve ersten Grades - krzywa pierwszego stopnia
    Kurve *n*-ten Grades - krzywa *n*-tego stopnia
    Kurve zweiten Grades - krzywa stopnia drugiego, parabola
    Sinuskurve - sinusoida
    Tangenskurve - tangensoida

L

Länge *die*; -; *-en* - długość

Länge einer Strecke - długość odcinka

Linearfaktor *der*; *-s*; *-en* - czynnik liniowy

Linearfaktorzerlegung *die*; –, *-en* - rozkład na czynniki liniowe, czyli zapisanie wyrażenia w postaci iloczynu czynników liniowych

Lot *das*; -(*e*)*s*; *-e* - prostopadła

M

Mantelfläche *die*; –, *-n* - powłoka boczna bryły

Mantelflächeninhalt *der*; -(*e*)*s*, *-e*; *meist Sg* - pole powierzchni bocznej bryły

Maßstab *der*; *-(e)s*; *-stäbe* - skala

Ähnlichkeitsmaßstab - skala podobieństwa

Menge *die*; −, *-n* - zbiór

Differenzmenge - różnica zbiorów

Durchschnittsmenge - iloczyn zbiorów

Schnittmenge - iloczyn zbiorów

Teilmenge - podzbiór

Vereinigungsmenge - suma zbiorów

Mittel *das*; *-s*, - środek, średnia

arithmetisches Mittel - średnia arytmetyczna

geometrisches Mittel - średnia geometryczna

Mittelglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz środkowy

Mittelpunkt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - środek

Mittelpunkt einer Strecke - środek odcinka

Mittelpunkt eines Kreises - środek okręgu / koła

Mittelpunkt einer Seite - środek boku (np. trójkąta)

Seitenmittelpunkt - środek boku (np. trójkąta)

Mittelpunktswinkel *der*; *-s*; - - kąt środkowy

Mittelsenkrechte *die; -n; -n* - symetralna odcinka

Monom *das*; *-s*, *-e* - jednomian

Monotonie *die*; –, *-n* - monotoniczność

Monotonie der Folge - monotoniczność ciągu

multiplizieren, multiplizierte, *hat* multipliziert - mnożyć

N

Nachfolger *der*; -s, − - następca, w ciągu wyraz następny, następnik

Neigungswinkel *der*; *-s*; - kąt nachylenia prostej do osi x

Nenner *der*; *-s*, − - mianownik

Hauptnenner ermitteln - ustalić (wyznaczyć) najmniejszy wspólny mianownik

Nenner faktorisieren - doprowadzić mianownik do postaci iloczynowej

Normalparabel - parabola o równaniu $y = x^2$

Nullpolynom *das; -s; -e* - ielomian zerowy

Nullpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - początek układu współrzędnych

Nullstelle *die*; –; *-n* - miejsce zerowe

Nullstelle des Polynoms - pierwiastek wielomianu

O

Ordinate *die*; –; -*n* - rzędna
Ordinatenachse - oś rzędnych (oś *y*)
orthogonal - prostopadły
Orthogonale *die*; –; -*en* - prosta prostopdła

P

Parabel *die*; −, -*n* - parabola
  Normalparabel - parabola o równaniu $y = x^2$
  Wendeparabel *die*; –, -*n* - krzywa o równaniu $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^{2n+1}$
parallel - równoległy
Parallele *die*; –; -*n* - prosta równoległa
Parallelogramm *das*; -*s*; -*e* - równoległobok
Pfeildiagramm *das*; -*s*; -*e* - diagram, jedna z metod przedstawiania funkcji
Polynom *das*; -*s*; -*e* - wielomian
  ganzzahliges Polynom - wielomian o współczynnikach całkowitych
  Koeffizient des Polynoms - współczynnik wielomianu
  Nullpolynom - wielomian zerowy
  Nullstelle des Polynoms - pierwiastek wielomianu
  Polynom ersten Grades - wielomian stopnia pierwszego
  Polynomgleichung - równanie wielomianowe
  Polynomwert - wartość wielomianu
  Polynom vom Grad Null - wielomian stopnia zerowego
  Polynom zweiten Grades - wielomian stopnia drugiego
Potenz *die*; −, -*en* - potęga
Potenzexponent *der*, -*en*, -*en* - wykładnik potęgi
Primfaktorzerlegung *die*; –, -*en* - rozkład na czynniki pierwsze
Produkt *das*; -(*e*); -*e* - iloczyn
Produktform *die*; –; -*en* - postać iloczynowa
Prozent *das*; -(*e*)*s*, −/ -*e* - procent
  Prozentpunkt *der*; *meist Pl* - punkt procentowy
Punkt *der*; -(*e*)*s*; -*e* - punkt
Punktspiegelung *die*; –, -*en* - symetria środkowa
Punktsymmetrie *die*; –, -*n* - symetria środkowa
punktsymmetrisch - środkowo symetryczny
  punktsymmetrisch zum Nullpunkt - symetryczny względem początku układu współrzędnych
  punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
Pyramide *die*; −, -*n* - ostrosłup
  Dreieckspyramide - ostrosłup trójkątny
  dreiseitige Pyramide - ostrosłup trójkątny
  vierseitige Pyramide - ostrosłup czworokątny

Q

Quadrant *der*; *-en*; *-en* - ćwiartka układu współrzędnych
Quadrat *das*; -(*e*)*s*; *-e* - kwadrat
Quadratwurzel *der*; –; *-n* - pierwiastek drugiego stopnia
Quersumme *die* - suma cyfr liczby
Quotient *der*; *-en*, *-en* - iloraz
  Quotient der geometrischen Folge - iloraz ciągu geometrycznego
  Quotient zweier linearer Funktionen - iloraz dwóch funkcji liniowych

R

Radikand *der*; *-en*, *-en* - liczba / wyrażenie podpierwiastkowe
Radius *der;* –; *Radien* - promień
Raute *die*; –; *-n* - romb
Rechteck *das*; *-s*; *-e* - prostokąt
Rest *der*; -(*e*)*s*; *-e* - reszta
  Rest aus der Division - reszta z dzielenia
Rhombus *der*; –-; *Rhomben* - romb
Richtungsfaktor *der*; *-s*; *-en* - współczynnik kierunkowy
runden, rundete, *hat* gerundet - zaokrąglić
  abrunden - eine Zahl nach oben runden - zaokrąglić z nadmiarem
  aufrunden - eine Zahl nach unten runden - zaokrąglić liczbę z niedomiarem
  eine gerundete Zahl - liczba zaokrąglona
  ein Ergebnis auf 2 Dezimalstellen runden - wynik zaokrąglić do dwóch miejsc po przecinku

S

Schaubild *das*; -(*e*)*s*; *-er* - wykres funkcji
Scheitelpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wierzchołek paraboli, wierzchołek kąta
Scheitelpunktform *die*; –; *-en* - postać kanoniczna trójmianu kwadratowego
Schenkel *der*; *-s*; – - ramię
Schnittpunkt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - punkt przecięcia
  Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen - punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych
  Schnittpunkt mit der Abszissenachse - punkt przecięcia z osią odciętych (z osią x)
  Schnittpunkt mit der Ordinatenachse - punkt przecięcia z osią rzędnych (z osią y)
Schnittwinkel *der* - kąt przecięcia
  Schnittwinkel zweier Geraden - kąt, pod jakim przecinają się dwie proste
Schreibweise *die* - sposób zapisu, pisania
  in der aufzählenden Schreibweise - wyliczając
Schwerlinie *die*; –; *-n* - środkowa w trójkącie
Schwerpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - środek ciężkości (punkt przecięcia środkowych trójkąta)
Sechseck *das*; *-s*, *-e* - sześciokąt
  regelmäßiges Sechseck - sześciokąt foremny
Sehne *die*; –; *-n* - cięciwa
Seite *die*; –; *-n* - bok
Seitenhalbierende *die*; *-n*; *-n* **-** środkowa w trójkącie
senkrecht - prostopadły

Senkrechte *die*; –; *-en* - prosta prostopadła
Sinus *der*; –; - sinus
Spiegelung *die*; –; *-en* - odbicie
  Punktspiegelung - odbicie względem punktu, symetria środkowa
  Spiegelgerade - prosta względem, której następuje przekształcenie odbicie
  Spiegelung an einer Geraden - odbicie względem prostej, symetria osiowa
Steigung *die*; –; *-en* - współczynnik kierunkowy
Steigungswinkel *der*; *-s*; - kąt nachylenia prostej do osi *x*
Strecke *die*; –; *-n* - odcinek
  Endpunkt einer Strecke - koniec odcinka
  Länge einer Strecke - długość odcinka
subtrahieren , subtrahierte, *hat* subtrahiert - odejmować
Summand *der*; *-en*; *-en* - składnik sumy
Summe *die*; –; *-n* - suma
Symmetrie *die*; –, *-n* - symetria
  Symmetrieachse *die*; –, *-n* - oś symetrii
  Symmetriezentrum *das*; *-s*, *Symmetriezentren* - środek symetrii
  Achsensymmetrie *die*; –, *-n* - symetria osiowa
  Punktsymmetrie *die*; –, *-n* - symetria środkowa
symmetrisch - symetryczny
  achsensymmetrisch - symetryczny względem osi
  achsensymmetrisch zu den beiden Winkelhalbierenden - osiowo symetryczny względem obu dwusiecznych (układu współrzędnych)
  punktsymmetrisch - środkowo symetryczny
  punktsymmetrisch zum Nullpunkt - symetryczny względem początku układu współrzędnych
  punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
  symmetrisch zur Geraden - symetryczny względem prostej

T

Tangens *der*; –; – - tangens
Tangente *die*; –, *-n* - styczna
  Tangente an den Kreis - styczna do okręgu
  Tangente an die Parabel - styczna do paraboli
teilbar - podzielny
Teiler *der*; *-s*; – - dzielnik
Term *der*; *-s*; *-e* - wyrażenie
Trapez *das*; *-es*; *-e* - trapez
Trigonometrie *die; –; nur Sg* - trygonometria
Trinom *das*; *-s*, *-e* - trójmian
  quadratisches Trinom - trójmian kwadratowy

U

Umfang *der*; *-s*; *Umfänge* - obwód
Umkreis *der*; *-es*; *nur Sg* - okrąg opisany na figurze
Umkreismittelpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - środek okręgu opisanego na figurze
Umkreisradius *der*; –; *-radien* - promień okręgu opisanego na figurze
umwandeln, wandelte um, *hat* umgewandelt - przekształcać
etwas in etwas (*Akk*) **umwandeln -** coś w coś przekształcać
etwas zu etwas umwandeln - coś na coś przekształcać
Umwandlung *die*; –, *-en* - przekształcenie, przeobrażenie
Umwandlung in etwas (*Akk*) - przekształcenie w coś
ungefähr - około
Ungleichung *die*; –; *-en* - nierówność
Ursprung *der* - początek układu współrzędnych
Ursprungsgerade *die* **-** prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych

V

Variable *die*; *-n*; *-n* - zmienna
Vektor *der*; *-s, Vektoren* - wektor
Betrag des Vektors - długość (moduł) wektora
verdoppeln; verdoppelte, *hat* verdoppelt - podwajać, podwoić
Verhältnis *das*; *-ses*, *-se* - stosunek, proporcja
das Verhältnis von etwas zu etwas - stosunek czegoś do czegoś
das Verhältnis zwischen etwas (*Dat*) **und etwas** (*Dat*) - stosunek między czymś a czymś
vermehren, vermehrte, *hat* vermehrt - pomnażać, powiększać
vermehren um - powiększać o
Vermehrung *die*; *nur Sg* - pomnażanie, powiększanie
vermindern, verminderte, *hat* vermindert - zmniejszyć
vermindern um - zmniejszyć o
Verminderung *die*; *nur Sg* - zmniejszenie, obniżenie
Verschiebung *die*; –, *-en* - przesuniecie
Verschiebung mit dem Vektor - przesuniecie o wektor
Vieleck *das*; *-s*, *-e* - wielokąt
regelmäßiges Vieleck - wielokąt foremny

Vielfache *das*; *-n*, *-n* - wielokrotność
das kleinste gemeinsame Vielfache - najmniejsza wspólna wielokrotność
Viereck *das*; *-s*, *-e* - czworokąt
konkave Vierecke - czworokąty wklęsłe
konvexe Vierecke - czworokąty wypukłe
regelmäßiges Viereck - czworokąt foremny, kwadrat
Volumen *das*; *-s*, – / *Volumina* - objętość
Vorgänger *der*; *-s*, – - poprzednik, w ciągu wyraz poprzedni
Vorzeichen *das*; *-s*, – - znak przed liczbą (plus albo minus)
mit wechselnden Vorzeichen - z przemieniającymi się znakami, raz plus raz minus

W

Wendeparabel *die*; –, -*n* - krzywa o równaniu $y = x^3$; $y = x^5$; $y = x^{2n+1}$

Wertemenge *die*; −, -*n* - zbiór wartości

Wertemenge einer Funktion - zbiór wartości funkcji

Winkelhalbierende *die*; -*n*, -*n* - dwusieczna kąta

1. Winkelhalbierende - prosta o równaniu $y = x$

2. Winkelhalbierende - prosta o równaniu $y = -x$

Winkelmaß *das* - miara kąta

Bogenmaß *das* - miara łukowa kąta (w radianach)

Gradmaß *das* - miara kąta w stopniach

Wurzel *die*; −, -*n* - pierwiastek

Kubikwurzel - pierwiastek sześcienny

n-**te Wurzel -** pierwiastek *n*-tego stopnia

Quadratwurzel - pierwiastek kwadratowy

Wurzel aus - pierwiastek z

Wurzelexponent - stopień pierwiastka

waagerecht - poziomo

Wert *der*; -(*e*)*s*; -*e* - wartość

größter Wert - wartość największa

kleinster Wert - wartość najmniejsza

negativer Wert - wartość ujemna

Polynomwert - wartość wielomianu

positiver Wert - wartość dodatnia

Wertebereich *der*; -(*e*)*s*; -*e*- zbiór wartości

Wertemenge *die*; –; -*n* - zbiór wartości

Wertetabelle *die*; –; -*n* - tabela wartości funkcji

Winkel *der*; -*s*; – - kąt

gestreckter Winkel - kąt półpełny

rechter Winkel - kąt prosty

spitzer Winkel - kąt ostry

stumpfer Winkel - kąt rozwarty

überstumpfer Winkel - kąt wklęsły

X, Y

***x*-Achse** *die; –; -n* - oś x

***y*-Achse** *die; –; -n* - oś y

Z

Zahl *die*; –, *-en* - liczba
    einstellige Zahl - liczba jednocyfrowa
    ganze Zahl - liczba całkowita
    gerade Zahl - liczba parzysta
    irrationale Zahl - liczba niewymierna
    Kubikzahl - liczba sześcienna, będąca szescianem liczby naturalnej
    natürliche Zahl - liczba naturalna
    negative Zahl - liczba ujemna
    positive Zahl - liczba dodatnia
    Primzahl - liczba pierwsza
    Quadratzahl - liczba kwadratowa, będąca kwadratem liczby naturalnej
    rationale Zahl - liczba wymierna
    reelle Zahl - liczba rzeczywista
    ungerade Zahl - liczba nieparzysta
    zusammengesetzte Zahl - liczba złożona
    zweistellige Zahl - liczba dwucyfrowa
Zahlenfolge *die*; -, *-n* - ciąg liczbowy
Zahlengerade *die*; −, *-n* - oś liczbowa
Zentrum *das*; *-s, Zentren* - środek
    Symmetriezentrum - środek symetrii
zerlegen, zerlegte, *hat* zerlegt - rozkładać
    zerlegen in *Akk* **-** rozkładać na
Zerlegung *die*; –, *-en* - rozkład
    Primfaktorzerlegung - rozkład na czynniki pierwsze
    Linearfaktorzerlegung - rozkład na czynniki liniowe
Ziffer *die*; −, *-n* - cyfra
    Einerziffer - cyfra jedności
    Zehnerziffer - cyfra dziesiątek
    Hunderterziffer - cyfra setek
Zinsen *Pl* - odsetki
    Zinsatz - stopa procentowa
    Zinsen nach Ablauf eines Jahres - odsetki po upływie roku
    Zinsfaktor - czynnik procentowy
Zinseszins *der*; *-es, -en meist Pl* - procent składany (odsetki od odsetek od kapitału)
Zinssatz *der* - stopa procentowa
zunehmen, nahm zu, *hat* zugenommen - wzrastać
Zuordnung *die*; –; *-en* - przyporządkowanie
Zweig *der*; -(*e*)*s*, *-e* - gałąź
    Zweige der Hyperbel - gałęzie hiperboli