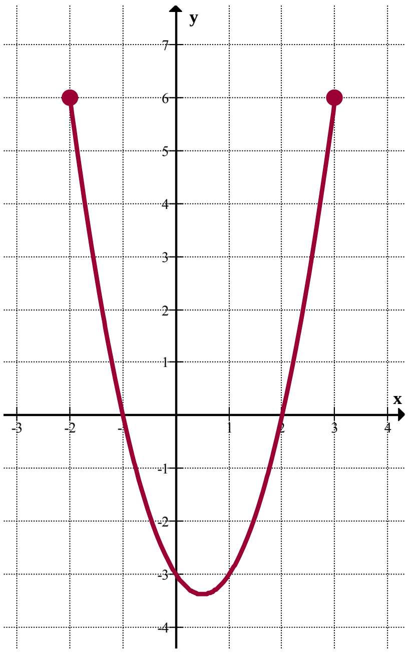
Mathematik

3



Agnieszka Caban
Ewa Ruszczyńska
Irena Wosz-Łoba

unter der Mitarbeit von Werner Hoppstock

INHALTSVERZEICHNIS

1. *Exponentialfunktion und Logarithmen* **3**
Agnieszka Caban

2. *Stereometrie* **12**
Ewa Ruszczyńska

3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung* **35**
Irena Wosz-Łoba

4. *Beschreibende Statistik mit Aufgaben zum DSD II* **55**
Agnieszka Caban

5. *Abiturbogen* **75**
Ewa Ruszczyńska

6. *Anhänge* **84**

7. *Lösungen* **88**

8. *Fachwortschatz* **100**

1. Exponentialfunktion und Logarithmen

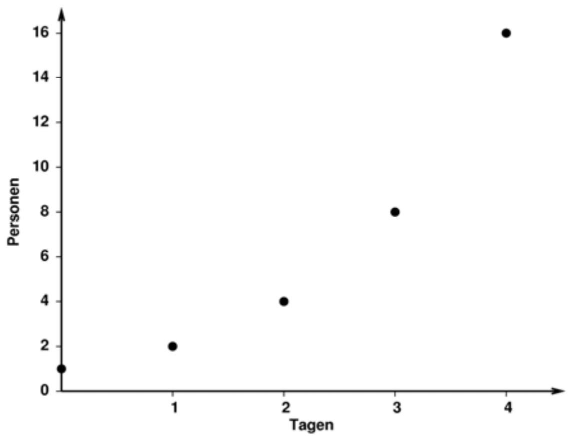
Wachstums- und Zerfallsfunktionen

Beispiel 1

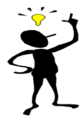
Eine unwahre Geschichte wird durch Weitererzählen von Person zu Person bekannt. Jeden Tag informiert jede Person, die diese unwahre Geschichte kennt, genau eine andere, die sie noch nicht kennt. Gib an, wie viele Personen das Gerücht nach 1 (2, 3, 4) Tagen kennen. Beschreibe diesen Wachstumsprozess mithilfe eines Terms und stelle den Zusammenhang graphisch dar.

Tagen (x)	1	2	3	4
Personen f(x)	2	4	8	16

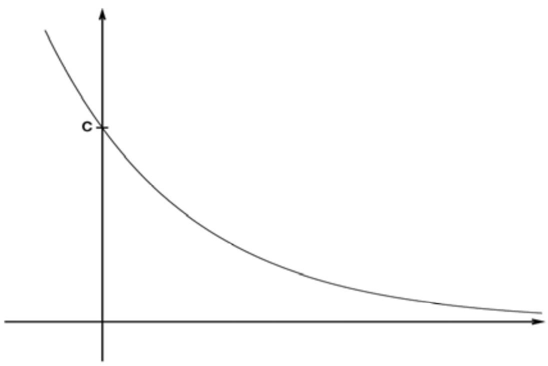
Die Zuordnung wird durch eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = 2^x,\ x \in N$ beschrieben.



Funktionen f mit einer Gleichung $f(x) = c \cdot a^x, c \in R, a > 0, x \in R$, nennt man **allgemeine Exponentialfunktionen zur Basis a**. Die allgemeine Exponentialfunktion nennt man bei Anwendungen auch:

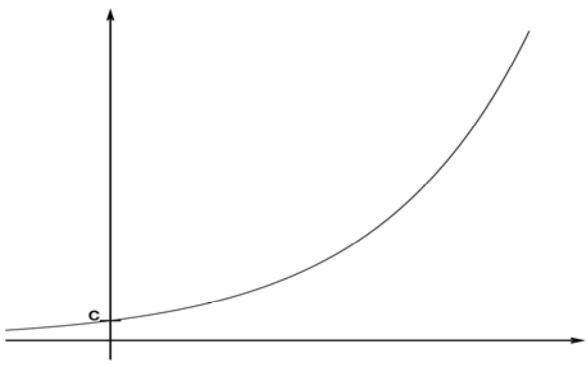


$0 < a < 1$



Zerfallsfunktion

$a > 1$



Wachstumsfunktion

a nennt man **Wachstumsfaktor** und **c Anfangswert**.

Beispiel 2.

www.wikipedia.de

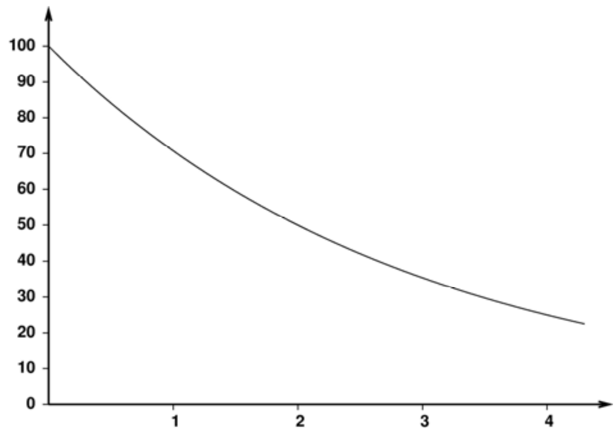
In einer Zellkultur sind zu Beginn 100 Zellen. Die Zellen sterben mit einer **Halbwertszeit** (die Zeitspanne, innerhalb derer die Hälfte der Zellen stirbt) von 2 Tagen ab.

Zeit t in Tagen	0	2	4
Anzahl der Zellen y	100	50	25

$\cdot\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cdot\frac{1}{2}$

Die Funktion, die die Entwicklung des Zellkulturbestands beschreibt, hat die Form:

$$y = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$ (Begründe die Form des Exponenten.)

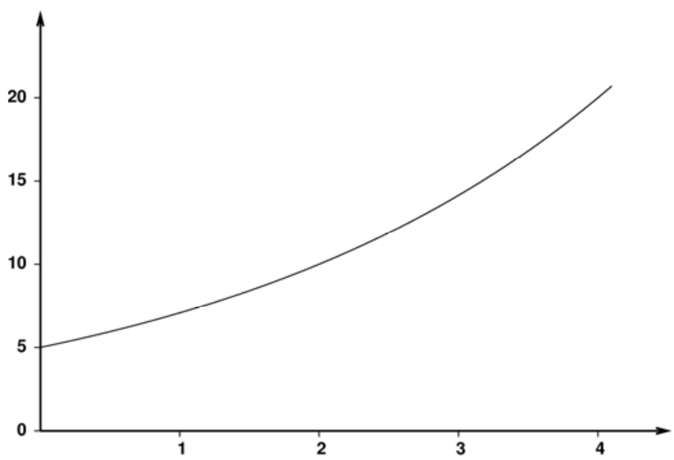


Beispiel 3:

In einer Zellkultur mit anfangs 5 Zellen verdoppelt sich die Zellenzahl durch Zellteilung im Abstand von 2 Tagen. t – Anzahl Tage, y – Zellenanzahl

Die Funktion, die die Entwicklung des Zellenkulturbestands beschreibt, hat die Form:

$y = 5 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.



Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die allgemeine Exponentialfunktion-.....................................

die Basis-...

die Wachstumsfunktion-...

die Zerfallsfunktion-...

die exponentielle Abnahme-..

die exponentielle Zunahme-..

die Halbwertszeit-..

1.1. Bei der Reaktorkatastrophe in Tschernobyl gelangten große Mengen an radioaktivem Jod-131 nach außen. Jod – 131 zerfällt relativ schnell. Seine Halbwertszeit beträgt 8 Tage.

www.wikipedia.de

a) Schreibe die Funktionsgleichung auf, die diesen Prozess beschreibt.

b) Bestimme um wie viel Prozent sich seine Masse pro Tag reduziert.

c) Fertige eine Wertetabelle, die den Zerfall von anfänglich 50 mg Jod – 131 über 10 Tage zeigt.

1.2. Kalium – 42 ist radioaktiv und hat eine Halbwertszeit von 12,25 Stunden. Dieses Element, welches in der Medizin Verwendung findet, wird einem Patienten gegeben. Nach wie viel Stunden hat sich die verabreichte Menge auf ein Viertel reduziert?

1.3. Radium ^{226}Ra zerfällt radioaktiv. Seine Halbwertszeit ist 1600 Jahre.

a) Bestimme, nach welcher Zeit 75% einer ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen sind.

b) Schreibe die Funktionsgleichung auf, die diesen Prozess beschreibt.

c) Es sei 1 g ^{226}Ra vorhanden. Berechne die Abnahme der Masse dieses Isotops nach 14 400 Jahren.

1.4. Auf einem eines mit Hilfe der C–14- Steinzeitmenschen gefunden. Sein Alter wurde Methode datiert. Die Halbwertszeit von C – 14 beträgt 5760 Jahre und eignet sich darum gut für Gletscher in den (Ötztaler) Alpen wurde im Jahre 1991 die Leiche die Datierung sehr langer Zeiträume. Der Anteil von C-14 betrug noch im 53% . Wie alt ist Őtzi?

1.5. 1 cm^3 Kuhmilch enthielt 3 Stunden nach dem Melken 6000 Keime; 1 Stunde später waren bereits 32000 Keime vorhanden. Wie viele Keime befanden sich in 1 cm^3 frischgemolkener Milch, wenn man exponentielles Wachstum annimmt?

1.6. Obstfliegen vermehren sich exponentiell, besonders in der Küche bei warmen Wetter. Nach zwei Tagen gab es 220 Fliegen, 3 weitere Tage später bereits 640 Fliegen. Berechne die Anzahl der Fliegen, die in die Wohnung gelangt sind und die Anzahl der Fliegen nach 10 Tagen.

1.7. Ein Heuschreckenschwarm pflanzt sich exponentiell fort, d.h. jede Woche um 50%. Man geht von einem Anfangsbestand von 1000 aus.

www.wikipedia.de

a) Wie lautet die zugehörige Wachstumsfunktion?

b) Welcher Zuwachs ist in 6 Wochen zu erwarten?

c) Um wie viel Prozent hat sich der Bestand dabei vergrößert?

1.8. Die Arbeitslosenzahl beträgt in einem Land derzeit 4,5 Mill. Sie soll innerhalb von 5 Jahren halbiert werden. Wie groß ist die jährliche Abnahme in Prozent, wenn exponentielle Abnahme vorausgesetzt wird?

1.9. Mit zunehmender Höhe nimmt der Luftdruck ab. In etwa 5,5 km über dem Boden ergibt sich der halbe Luftdruck. Auf welchen Bruchteil des Luftdrucks in Meereshöhe ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (rund 8850m) abgesunken?

1.10. Ein Bestand kann durch die Funktion f mit $f(t) = 50 \cdot 0{,}85^t$, t – Anzahl Tage, beschrieben werden.

a) Wie groß ist der Bestand bei Beginn der Beobachtung?

b) Wie groß ist die Bestandsabnahme innerhalb der ersten zwei Tage?

c) Berechne die wöchentliche Abnahme in Prozent.

1.11. In einem See vervierfacht sich der Algenbewuchs pro Jahr, seit von den angrenzenden Feldern durch Regen viele Nährstoffe in den See gelangen. Zu Beginn unserer Beobachtung sind 10 Quadratmeter mit Algen bedeckt. Der See ist 0,1 km^2 groß. Nach wie vielen Jahren wird mehr als ein Viertel des Sees von Algen bedeckt?

1.12. Der Wertverlust eines Autos ist im 1. Jahr am größten. Danach wird der Wertverlust von Jahr zu Jahr geringer. Der Autohandel geht von 15% Wertverlust pro Jahr aus. Das neue Auto hat 10 000 € EURO gekostet.

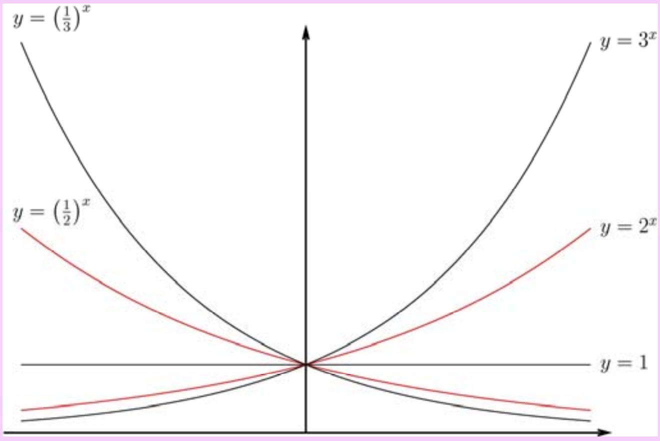
a) Ermittle den Term der Funktion, die den Wertverlust beschreibt.

b) Berechne den Wert des Autos nach 3 Jahren.

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen haben eine Vorschrift der Form: $f(x) = a^x, a \in R^+$, $x \in R$

Eigenschaften von Exponentialfunktionen



Alle Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt (0;1), da immer $a^0 = 1$ gilt.

Wenn $a > 1$ und $x \in R$ ist, dann steigt die Funktion streng monoton.Wenn $0 < a < 1$ und $x \in R$ ist, dann fällt die Funktion streng monoton.Wenn $a = 1$ und $x \in R$ ist, dann ist die Funktion konstant. Der Wertebereich der Exponentialfunktion umfasst alle positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion verläuft stets oberhalb der x-Achse. Die waagerechte Asymptote dieses Graphen ist die x-Achse. Um das Schaubild einer Exponentialfunktion zu zeichnen, berechnen wir die Koordinaten von zwei Punkten z.B. (0,1) und (1,a).

Die Graphen der Funktionen $f(x) = a^x$ und $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sind symmetrisch zu der y-Achse.

1.13. Ergänze folgenden Text und verbinde die Sätze, die dieselben mathematischen Eigenschaften der Funktion beschreiben und daher gleichwertig sind:

- Alle Funktionswerte der Exponentialfunktionen sind ....
- Für $0 < a < 1$ werden die Funktionswerte bei steigenden x-Werten immer ....
- Alle Graphen der Exponentialfunktionen verlaufen .... der x-Achse.
- Für $x = 0$ haben alle Exponentialfunktionen den Wert $y = ...$.

- Alle Graphen der Exponentialfunktionen haben die x-Achse als ....
- Die Graphen der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = b^x$ mit $a = \frac{1}{b}$ verlaufen .... zueinander, mit der y-Achse als ....
- Alle Exponentialfunktionen haben den Wertebereich $W =$ ....
- Alle Graphen der Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt (......;......).
- Für $a > 1$ werden die Funktionswerte bei steigenden x-Werten immer ....

1.14. Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ geht durch den Punkt P(3;2). Bestimme a und gib den Funktionsterm von f an.

1.15. Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ geht durch den Punkt P. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm.

a) P(1;3) **b)** P(2; $\frac{1}{4}$) **c)** P(2;6) **d)** P(-1;3) **e)** P($-\frac{1}{2}$;$\frac{1}{16}$).

1.16. Der Graph einer allgemeinen Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ geht durch die Punkte P und Q. Bestimme a und c.

a) P(1;1) Q(2;2) **b)** P(-1;5) Q(0;7) **c)** P(4;5) Q(5;6).

1.17. Zeichne mithilfe einer geeigneten Wertetabelle den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ im Intervall $\langle -2;2 \rangle$. Gewinne daraus die Graphen der folgenden Funktionen:

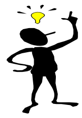
$$g(x) = 2^{-x}; h(x) = 2^x - 1; i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

1.18. Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ und bestimme daraus die Lösung der Ungleichung $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$.

1.19. Markiere im Koordinatensystem alle Punkte,die die Ungleichung $y \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$ erfüllen.

1.20. Welche Zahl ist größer? (<;>)

a) $3^{3,2}, 3^{\frac{22}{7}}$ **b)** $\sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{125}$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$ **d)** $7^{\Pi}, 7^{3,1}$



Logarithmus

Unter dem **Logarithmus** einer positiven Zahl b zur **Basis** a ($a > 0; a \neq 1$) versteht man diejenige reelle Zahl c, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad ,(a > 0, b > 0; a \neq 1)$$

Das Logarithmieren ist eine Umkehrung des Potenzierens.

Beim Potenzieren wird der Wert der Potenz $a^c = b$ berechnet. Beim Logarithmieren ist in der Gleichung $a^c = b$ der **Exponent** c gesucht.

Die Logarithmen zur Basis 10 nennt man **Zehnerlogarithmen** oder **dekadische Logarithmen**. Die Logarithmen zur Basis e ≈ 2,71828.... (sg. Eulersche Zahl) nennt man **natürliche Logarithmen**.

Die Verwendung des Logarithmus **(***altgriechisch: logos - Verhältnis, arithmos - Zahl*) lässt sich bis in die indische Antike zurückverfolgen. Indische Mathematiker im 2. Jahrhundert v. Chr. haben als Erste Logarithmen erwähnt. Schon in der Antike nutzten sie Logarithmen für ihre Berechnungen zur Basis zwei. Im 8. Jahrhundert beschrieb der indische Mathematiker Virasena Logarithmen zur Basis drei und vier. Ab dem 13. Jahrhundert wurden von arabischen Mathematikern ganze logarithmische Tabellenwerke erstellt. Mit dem aufstrebenden Bankwesen und dem Fortschritt der Astronomie im Europa des 17. Jahrhunderts erlangte der Logarithmus immer mehr an Bedeutung. Seine Funktionswerte wurden in Tabellenwerken, den Logarithmentafeln erfasst, um sie nachschlagen zu können und nicht immer neu berechnen zu müssen. Diese Tabellen wurden schließlich durch Rechenschieber und später Taschenrechner verdrängt.

www.wikipedia.de

John Napier (geb. **1550** in **Merchiston Castle** bei **Edinburgh**; gest. **3. April 1617** in Merchiston Castle) war ein schottischer **Mathematiker** und Naturgelehrter. Er schrieb ein Buch über den **Logarithmus** (1614), dessen Grundlagen er entwickelte. Die **Napierschen Rechenstäbchen**, Vorläufer des **Rechenschiebers**, hatten einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der **Rechenmaschinen**.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Logarithmus- ....

die Basis- ....

der Exponent - ....

der Zehnerlogarithmus – ....

der dekadischer Logarithmus - ....

Beispiel 4.

Bestimme den Wert folgender Logarithmen:

a) $\log_2 8 = ?$ Wie lautet der Exponent c zur Basis 2, damit 2^c den Wert 8 ergibt? Mit dieser gesuchten Zahl, die du sicher erkannt hast, gilt: $\log_2 8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Du könntest den Logarithmus auch als eine Potenz schreiben: $\log_2 8 = c \Leftrightarrow 2^c = 8 \Leftrightarrow c = .3.$

b) $\log_3 81 = c \Leftrightarrow 3^c = 81 \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = c \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^c = 32 \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = c \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^c = \frac{1}{27} \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $\log_5 5 = c \Leftrightarrow 5^c = 5 \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $\log_5 \sqrt{125} = c \Leftrightarrow 5^c = \sqrt{125} \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = c \Leftrightarrow a^c = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots \; a > 0; a \neq 1$

h) $\log_a 1 = c \Leftrightarrow a^c = 1 \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a > 0; a \neq 1$

i) $\log_{81} 9\sqrt{3} = c \Leftrightarrow 81^c = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1.21. Berechne:

$a)\log_3 27 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b)\log_5 625 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$c)\log_4 \frac{1}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$d)\log \sqrt{1000} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$e)\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f)\log_a a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$g)\log_6 \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Rechengesetze:

1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v, \quad (a > 0, u, v > 0; a \neq 1)$

2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

3) $\log_a u^n = n \cdot \log_a u \qquad (a > 0, u > 0; a \neq 1, n \in R)$

4) Basisumrechnung: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad (a > 0, b > 0; a \neq 1, c > 0, c \neq 1)$

1.22. Vereinfache mit Hilfe der Logarithmensätze.

a) $2\log 6 - \log 2 - \log 4 =$

b) $\log x^2 - \log x =$

c) $\log x^3 - 2\log \frac{1}{x} =$

d) $\log xy - \log x^2 y =$

e) $\log x - \log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt{x}} =$

f) $(\log x^2) : (\log x) - 2 =$

g) $4\log x - \log \frac{1}{x} + \log x^2 =$

1.23.

a) Es soll $\log_6 27$ mit Hilfe von a ausgedrückt werden, wobei $a = \log_6 2$ gilt.

b) Es soll $\log_{25} 12$ mit Hilfe von a und b ausgedrückt werden, wobei $a = \log_5 4, b = \log_5 3$ gilt.

c) Es soll $\log_{27} 0{,}8$ mit Hilfe von a und b ausgedrückt werden, wobei $a = \log_3 4, b = \log_3 5$ gilt.

1.24. Bestimme den Wert des folgenden Ausdrucks:

$$\log_a \frac{\sqrt{a^3}\, a^{\frac{1}{2}} \left(a^2\right)^3}{a^{-1}} ; a > 0; a \neq 1$$

1.25. Beweise den Satz: „Wenn $a \in R_+ - \{1\}, m \in R, n \in R - \{0\}$, dann $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$.

1.26. Berechne den Wert ohne Verwendung des Taschenrechners :

a) $\log_{2,5} 6{,}4 - 2\log_{2,5} 10 - \log_{2,5} 0{,}4 =$

b) $\log_{0,5} 2^{-2} - \log_{12} \frac{\sqrt{12}}{144} - \log_{\frac{1}{8}} 0{,}125 =$

c) $\log_3 6 \cdot \log_6 9 =$

d) $\log_4 \sqrt{5} \cdot \log_{25} 8 =$

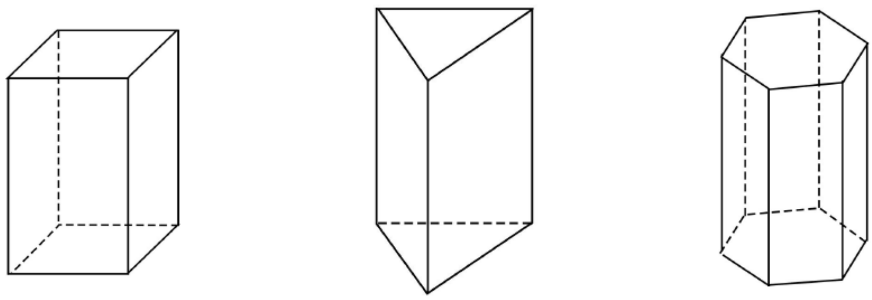
1.27. Berechne den Wert mit Hilfe der Formel:

$$a^{\log_a b} = b, a \in R_+ - \{1\}, b \in R_+$$

a) $5^{\log_5 125}$, **b)** $3^{\frac{1}{2}\log_3 16}$, **c)** $10^{\log 5}$, **d)** $16^{\log_2 3}$, **e)** $16^{\log_2 \sqrt[4]{2}}$.

Gerades Prisma

Ein **gerades Prisma** ist ein Körper, der aus einer **Grundfläche**, einer **Deckfläche** und aus drei oder mehr Seitenflächen besteht. Grundfläche und Deckfläche sind kongruent und zueinander parallel. Diese Flächen können Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, usw. sein. Jede **Seitenfläche** ist senkrecht zur Grund- und Deckfläche.



Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Körper - . . . .

das Prisma - . . . .

gerades Prisma - . . . .

der Quader - . . . .

die Grundfläche - . . . .

die Deckfläche - . . . .

kongruent - deckungsgleich- . . . .

die Kante - . . . .

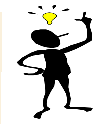
die Seitenfläche - . . . .

der Mantel, **die Mäntel** - . . . .

die Mantelfläche - . . . .

die Oberfläche - . . . .

das Volumen
der Rauminhalt - . . . .



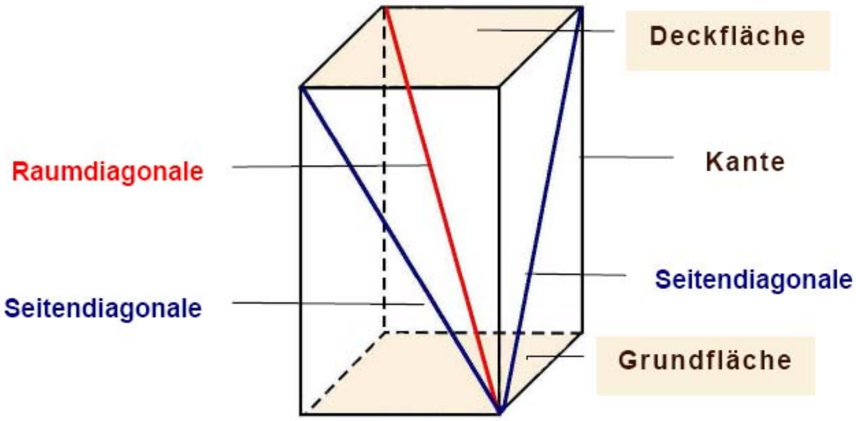
Die Seitenflächen sind stets Rechtecke.

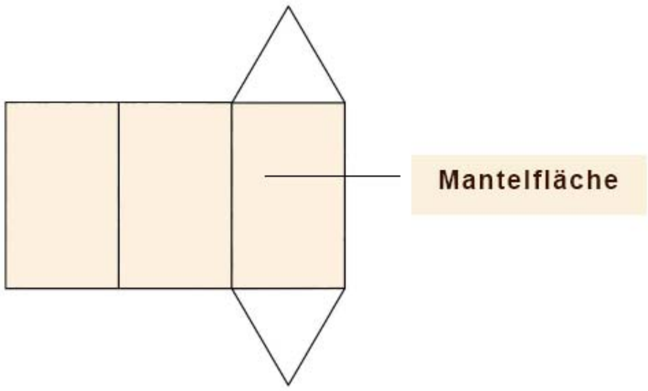
Die Seitenflächen des Prismas bilden den **Mantel** des Prismas.

Der Abstand **H** der Grundfläche von der Deckfläche heißt **Höhe des Prismas**.

Alle Kanten, die nicht in der Grundfläche oder in der Deckfläche liegen, haben diese Länge **H**.

Bei einem Prisma bilden die rechteckigen Seitenflächen den **Mantel**.





Mantelfläche A_M eines Prismas (Flächeninhalt des Mantels): $\mathbf{A_M = U \cdot H}$

Umfang der Grundfläche **U** mal Höhe (Körperhöhe) **H**

Die **Oberfläche** A_O eines Prismas setzt sich aus der Grundfläche und Deckfläche sowie der Fläche des Mantels zusammen.

Oberfläche A_O eines Prismas: $A_O = 2 \cdot A_G + A_M$

zwei mal Grundfläche A_G plus Mantelfläche A_M

Volumen V eines Prismas: $\mathbf{V = A_G \cdot H}$

Grundfläche A_G mal Körperhöhe **H**

2.1. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat ein Prisma, dessen Grundfläche ein Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck ist? Ergänze die Tabelle.

Grundfläche des Prismas	Anzahl der			**F + E**	**K + 2**
	Ecken **E**	Kanten **K**	Flächen **F**		
Dreieck					
Viereck					
Fünfeck					
Sechseck					

Was kann man anhand dieser Tabelle über die Summen $\mathbf{F+E}$ und $\mathbf{K+2}$ feststellen?

2.2. Wie verändert sich die Größe der Oberfläche eines Quaders,

a) wenn man die Länge jeder Kante verdoppelt?

b) wenn man die Länge jeder Kante verdreifacht?

c) wenn man die Länge jeder Kante x-mal vervielfacht?

2.3. Wie verändert sich das Volumen eines geraden Prismas,

a) wenn man die Höhe verdoppelt?

b) wenn man die Höhe verdreifacht?

c) wenn man die Größe der Grundfläche verdoppelt?

d) wenn man die Größe der Grundfläche verdreifacht?

e) wenn man die Länge jeder Kante x-mal vervielfacht?

2.4. Die Grundseite eines Prismas ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm. Die Höhe des Prismas ist 6 cm lang.

a) Berechne die Länge der Raumdiagonalen dieses Prismas.

b) Berechne den Mantelflächeninhalt dieses Prismas.

c) Berechne den Oberflächeninhalt dieses Prismas.

d) Berechne das Volumen dieses Prismas.

2.5. Die Grundseite eines Prismas ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $2\sqrt{2}$ cm. Die Höhe des Prismas ist 6 cm lang. Fertige eine Skizze an und markiere den Winkel zwischen Raumdiagonale und der Grundseite des Prismas. Berechne den Tangenswert dieses Winkels.

2.6. Die Grundseite eines Prismas ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ cm. Die Höhe des Prismas ist 4 cm lang.

a) Fertige eine Skizze an und markiere den Winkel zwischen Raumdiagonale und der Grundseite des Prismas.

b) Berechne den Sinuswert dieses Winkels.

c) Berechne den Oberflächeninhalt und den Rauminhalt dieses Prismas.

2.7. Ein Quader mit der Höhe 2 cm hat als Grundfläche ein Rechteck, dessen Seiten 3 cm und 6 cm lang sind.

a) Berechne den Rauminhalt dieses Quaders.

b) Berechne den Radius und das Volumen der umbeschriebenen Kugel.

c) Vergleiche die beiden Volumen.

2.8. Ein gerades Prisma mit der Höhe 5 cm hat als Grundfläche ein Rechteck, dessen Seiten 3 cm und 4 cm lang sind. Mache eine Skizze und markiere den Winkel zwischen Raumdiagonale und der Grundseite des Prismas. Bestimme diesen Winkel.

2.9. Ein gerades Prisma mit der Höhe 10 cm hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck dessen Katheten 12 cm und 5 cm lang sind.

a) Berechne den Grundflächeninhalt dieses Prismas.

b) Berechne den Mantelflächeninhalt dieses Prismas.

c) Berechne den Oberflächeninhalt dieses Prismas.

d) Berechne den Rauminhalt dieses Prismas.

2.10. Alle Grundkanten eines geraden dreiseitigen Prismas sind 4 cm lang. Das Prisma ist 10 cm hoch.

a) Berechne den Grundflächeninhalt dieses Prismas.

b) Berechne den Mantelflächeninhalt dieses Prismas.

c) Berechne den Oberflächeninhalt dieses Prismas.

d) Berechne das Volumen dieses Prismas.

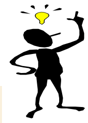
2.11. Ein gerades Prisma hat als Querschnitt eine regelmäßige Sechseckfläche mit der Kantenlänge 2 cm. Der Körper ist 6 cm hoch.

a) Berechne den Mantelflächeninhalt dieses Prismas.

b) Berechne den Oberflächeninhalt dieses Prismas.

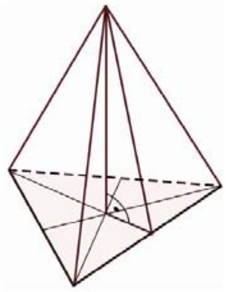
c) Berechne den Rauminhalt dieses Prismas.

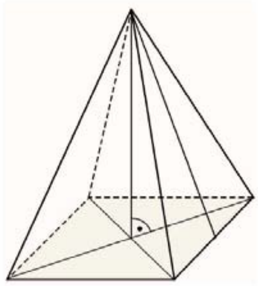
Pyramide

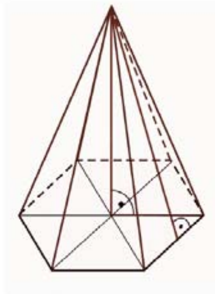


Ein Körper heißt **Pyramide**, wenn er:

- als Grundfläche ein *n*-Eck hat und
- als Seitenflächen *n* Dreiecke, die einen gemeinsamen Eckpunkt (die Spitze) haben.



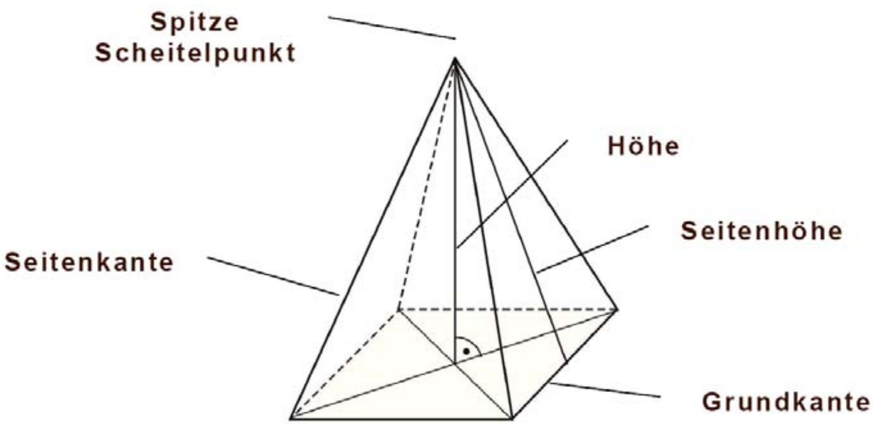




Die Vielecksfläche heißt die **Grundfläche** der Pyramide,

der Punkt *S* ihr **Scheitelpunkt** oder die **Spitze** der Pyramide.

Die geraden Verbindungslinien der Spitze mit den Eckpunkten des Vielecks heißen die **Seitenkanten**, die Seiten des Vielecks die **Grundkanten**.



Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Pyramide - . . . .

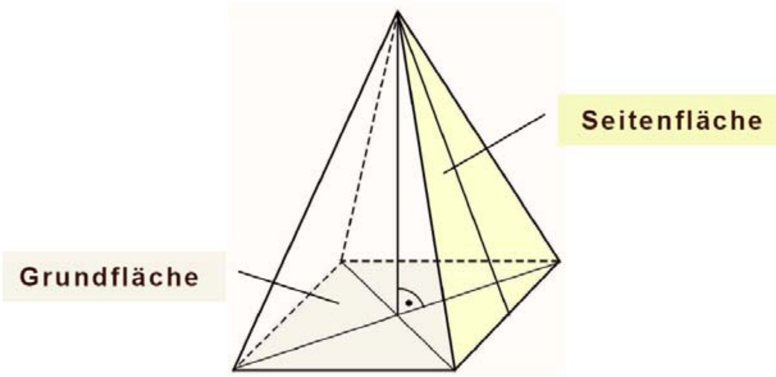
der Scheitelpunkt
die Spitze - . . . .

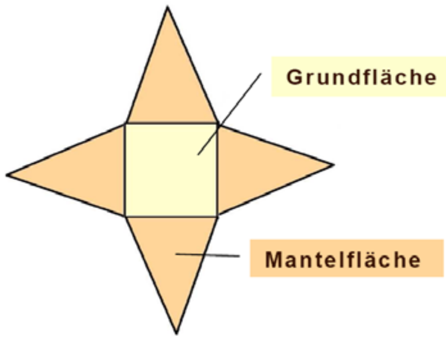
die Kante - . . . .

die Seitenkante - . . . .

die Grundkante - . . . .

Die **Seitenfläche** wird von zwei Seitenkanten und der Grundkante begrenzt und die Seitenfläche hat eine **Seitenhöhe**. Alle Seitenflächen bilden den **Mantel** der Pyramide. Grundfläche und Mantel bilden zusammen die **Oberfläche** der Pyramide. Die Senkrechte von der Spitze auf die Vielecksfläche heißt die **Körperhöhe** der Pyramide.
Man unterscheidet dreiseitige, vierseitige, fünfseitige, … Pyramiden.





Die **Oberfläche** einer Pyramide setzt sich aus der **Grundfläche** und der **Mantelfläche** zusammen. Bei Pyramiden mit regelmäßigen Vielecken als Grundfläche besteht die Mantelfläche aus so vielen gleichschenkligen Dreiecken wie die Grundfläche Seiten bzw. Ecken hat.

Oberfläche A_O einer Pyramide: $A_O = A_G + A_M$

Grundfläche A_G plus Mantelfläche A_M

Volumen V einer Pyramide: $V = \frac{1}{3} A_G \cdot \mathbf{H}$

ein Drittel Grundfläche A_G mal Körperhöhe $\mathbf{H}$

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Seitenfläche - . . . .

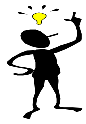
die Seitenhöhe - . . . .

das Vieleck - . . . .

regelmäßiges Vieleck - . . . .

der Höhenfußpunkt - . . . .

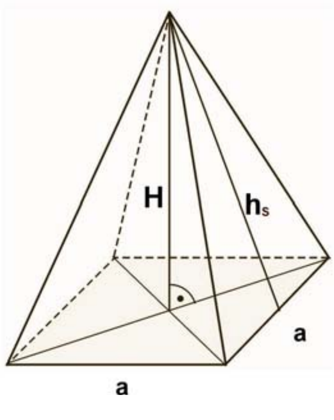
Regelmäßige Pyramiden



Die **regelmäßigen Pyramiden** haben als Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und die Spitze befindet sich in der Höhe senkrecht über der Mitte der Grundfläche. Der Mantel einer regelmäßigen *n*-seitigen Pyramide besteht aus *n* gleichschenkligen kongruenten Dreiecken.
Der **Höhenfußpunkt** der regelmäßigen Pyramide hat den gleichen Abstand von allen Ecken der Grundseite und ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche.

Quadratische Pyramide

Die **quadratische Pyramide** hat als Grundfläche ein Quadrat und die Spitze befindet sich in der Höhe **H** senkrecht über der Mitte der Grundfläche. Der Mantel einer quadratischen Pyramide besteht aus vier gleichschenkligen kongruenten Dreiecken.
Der **Höhenfußpunkt** der quadratischen Pyramide hat den gleichen Abstand von allen vier Ecken der Grundseite, ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche und das ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates.



a - Grundkante
h_s - Seitenhöhe
H - Körperhöhe

Mantelfläche A_M einer quadratischen Pyramide: $A_M = 4 \cdot \frac{1}{2} a h_s$

vier mal Seitenfläche $\frac{1}{2} a h_s$

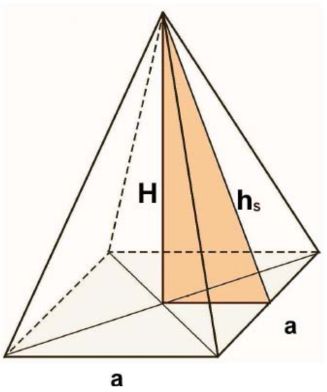
Oberfläche A_O einer quadratischen Pyramide: $A_O = a^2 + 2ah_s$

Grundfläche a^2 plus Mantelfläche $2ah_s$

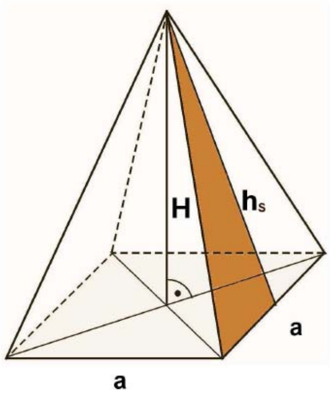
Volumen V einer quadratischen Pyramide: $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \mathbf{H}$

ein Drittel Grundfläche a^2 mal Körperhöhe **H**

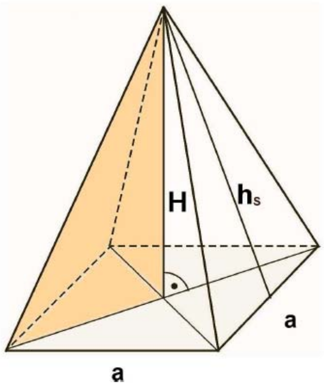
Bei Berechnungen an der quadratischen Pyramide benutzt man stets rechtwinklige Dreiecke.



halber Parallelschnitt



halbe Seitenfläche



halber Diagonalschnitt

2.12. Berechne den Mantelflächeninhalt und den Oberflächeninhalt der quadratischen Pyramide mit der Grundkante 6 cm und der Körperhöhe 6 cm.

2.13. Berechne die Länge der Grundkanten einer quadratischen Pyramide mit dem Oberflächeninhalt $138\ cm^2$ und der Seitenhöhe 8,5 cm.

2.14. Die Seitenflächen einer quadratischen Pyramide sind gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 6 cm. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der Pyramide.

2.15. Die Parallelschnittfläche einer quadratischen Pyramide ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge 6 cm. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der Pyramide.

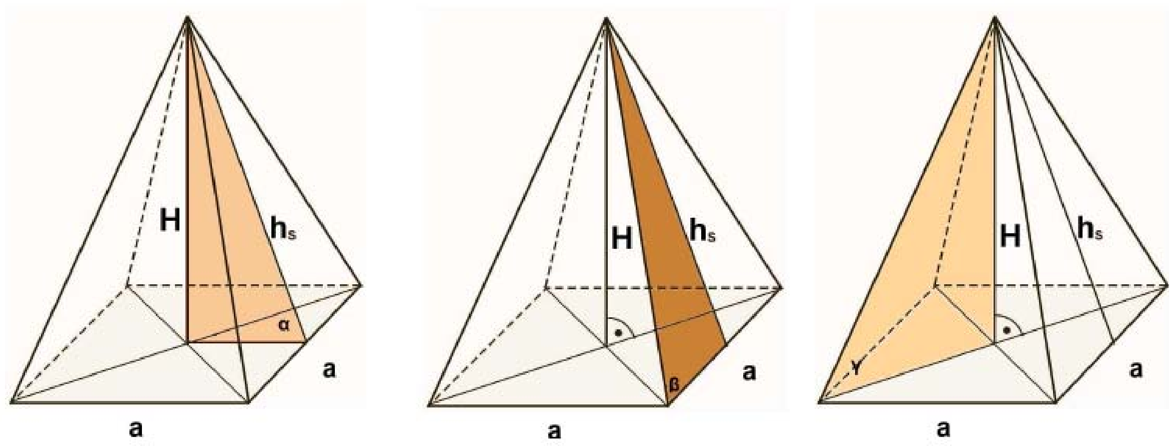
2.16. Die Diagonalschnittfläche einer quadratischen Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 8 cm. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der Pyramide.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Parallelschnitt - . . . .

der Diagonalschnitt - . . . .

In einer quadratischen Pyramide lassen sich unterschiedliche Winkel finden.



α – Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche

β – Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

γ – Winkel zwischen Seitenkante und Grundkante

2.17. Von einer quadratischen Pyramide ist die Länge der Grundkante $12\ \text{cm}$ gegeben. Berechne den Mantelflächeninhalt der Pyramide mit dem Winkel α zwischen Grundfläche und Seitenfläche.

a) $\alpha = 30^\circ$,

b) $\alpha = 45^\circ$,

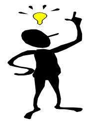
c) $\alpha = 60^\circ$.

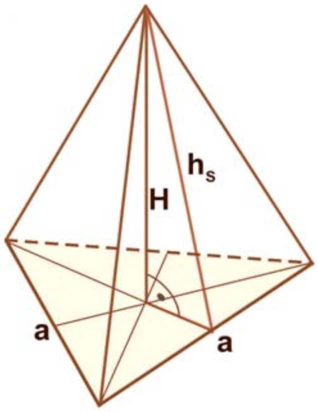
2.18. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $6\ \text{cm}$ und der Seitenhöhe $5\ \text{cm}$.

2.19. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $8\ \text{cm}$ und der Höhe $3\ \text{cm}$.

2.20. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $6\sqrt{2}\ \text{cm}$ und der Seitenkante $10\ \text{cm}$.

Dreieckspyramide





Pyramiden mit einem regelmäßigen Dreieck als Grundfläche bezeichnen wir kurz als **Dreieckspyramiden**.

a - Grundkante
h_s - Seitenhöhe
H - Körperhöhe

Die Dreieckspyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und Höhe steht im Mittelpunkt senkrecht auf der Grundfläche. Der Mantel einer Dreieckspyramide besteht aus 3 gleichschenkligen kongruenten Dreiecken. Der Höhenfußpunkt der Dreieckspyramide hat den gleichen Abstand von allen drei Ecken der Grundseite, ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche und das ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks.
Der **Höhenfußpunkt** der Dreieckspyramide teilt die Dreieckshöhe der Grundfläche im Verhältnis **2:1**.

Mantelfläche A_M einer Dreieckspyramide: $A_M = 3 \cdot \frac{1}{2} a h_s$

drei mal Seitenfläche $\frac{1}{2} a h_s$

Oberfläche A_O einer Dreieckspyramide: $A_O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} a h_s$

Grundfläche $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ plus Mantelfläche $\frac{3}{2} a h_s$

Volumen V einer Dreieckspyramide : $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

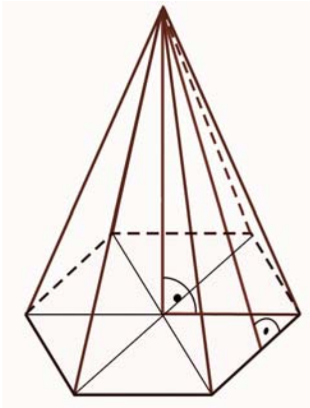
ein Drittel Grundfläche $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mal Körperhöhe H

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Dreieckspyramide - . . . .

der Höhenfußpunkt - . . . .

Sechseckspyramide



Pyramiden mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche bezeichnen wir kurz als **Sechseckspyramiden**.

Die Sechseckspyramide hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck und der Mantel besteht aus sechs gleichschenkligen kongruenten Dreiecken.
Der Höhenfußpunkt der Pyramide hat den gleichen Abstand von allen sechs Ecken der Grundfläche, ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche.

Mantelfläche A_M einer Sechseckspyramide: $\boldsymbol{A_M} = 6 \cdot \frac{1}{2} a h_s$

sechs mal Seitenfläche $\frac{1}{2} a h_s$

Oberfläche A_O einer Sechseckspyramide : $\boldsymbol{A_O} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 + 3ah_s$

Grundfläche $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ plus Mantelfläche $3ah_s$

Volumen $\boldsymbol{V}$ einer Sechseckspyramide: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot H$

ein Drittel Grundfläche $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mal Körperhöhe H

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Sechseckspyramide - . . . .

2.21. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Dreieckspyramide mit der Grundkante 6 cm und der Seitenhöhe $\sqrt{7}\text{ cm}$.

2.22. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Dreieckspyramide mit der Grundkante 6 cm und der Höhe $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

2.23. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Dreieckspyramide mit der Grundfläche $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$ und der Höhe 4 cm.

2.24. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Sechseckspyramide mit der Grundkante 4 cm und der Höhe 4 cm.

2.25. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Sechseckspyramide mit der Grundkante 8 cm und der Seitenkante 10 cm.

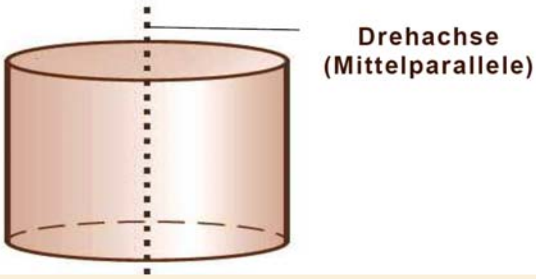
2.26. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen einer Sechseckspyramide mit der Grundfläche $24\sqrt{3}\text{ cm}^2$ und der Höhe 3 cm.

Gerader Zylinder

Drehe ein beliebiges Rechteck im Raum um eine seiner Mittelparallelen.

Welcher geometrische Körper wird durch das rotierende Rechteck erzeugt?

Man erhält einen **Drehkörper** (**Rotationskörper**), der durch die **Drehung** (**Rotation**) einer Fläche **um** eine Achse im Raum entsteht.



Ein **gerader Zylinder** entsteht, wenn ein Rechteck um seine **Mittelparallele** (**Drehachse**) rotiert.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

der Zylinder - . . . .

die Parallele - . . . .

das Rechteck - . . . .

die Mittelparallele - . . . .

rotieren - . . . .

etw. rotiert = etw. dreht sich im Kreis um etw. - . . . .

die Rotation- . . . .

der Rotationskörper
der Drehkörper - . . . .

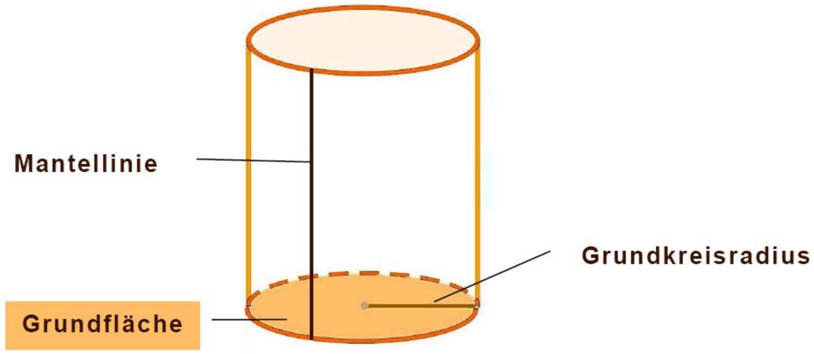
die Drehung - . . . .

drehen um etw. - . . . .

etw. dreht sich um etw. - . . . .

die Drehachse - . . . .

Die Oberfläche eines Zylinders setzt sich aus dem Mantel und den beiden kongruenten Grundflächen und Deckflächen zusammen. Der Mantel bildet in der Ebene ein Rechteck.



Mantelfläche A_M eines Zylinders (Flächeninhalt des Mantels): $A_M = 2\pi r \cdot H$

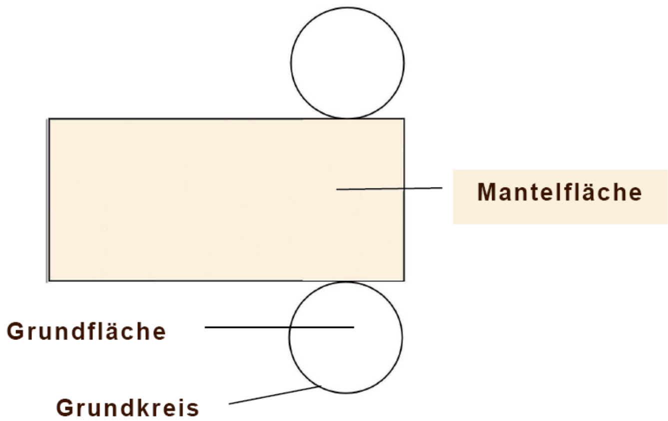
Umfang des Grundkreises $2\pi r$ mal Höhe (Körperhöhe) H

Oberfläche A_O eines Zylinders: $A_O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r(r+H)$

zwei mal Grundfläche πr^2 plus Mantelfläche $2\pi r H$

Volumen V eines Zylinders: $V = \pi r^2 \cdot H$

Grundfläche πr^2 mal Körperhöhe H



Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Mantellinie - . . . .

der Grundkreis des Zylinders - . . . .

der Grundkreisradius - . . . .

2.27. Eine Litfaßsäule hat den Durchmesser 1,0 m. Sie ist 2,2 m hoch. Der 20 cm hohe Sockel soll nicht beklebt werden. Berechne die Größe der Werbefläche.

*Eine **Litfaßsäule** ist eine Anschlagsäule, an die Plakate geklebt werden. Sie wurde vom Berliner Drucker Ernst Litfaß (* 1816 in Berlin, † 1874 in Wiesbaden) erfunden und zählt zum Bereich der Außenwerbung.*

Die Idee, Plakatsäulen aufzustellen, entstand, um der damals um sich greifenden Wildplakatierung entgegenzuwirken. Litfaß schlug den Behörden vor, überall in der Stadt Säulen aufzustellen, an denen die Menschen ihre Plakate anhängen konnten. Nach jahrelangen Verhandlungen erteilte der Berliner Polizeipräsident Karl Ludwig von Hinkeldey Litfaß am 5. Dezember 1854 die erste Genehmigung für seine „Annoncier-Säulen“. Er bekam von der Stadt Berlin ein bis 1865 gültiges Monopol für die Aufstellung seiner Säulen.

Dies geschah allerdings unter der Auflage, auch die neuesten Nachrichten zu publizieren. Im Jahre 1855 wurden die ersten 100 Litfaßsäulen in Berlin aufgestellt und dem Erfinder zu Ehren nach ihm benannt. Im Jahre 1865 wurden weitere 50 Säulen aufgestellt. Sowohl die Behörden als auch die Werbekunden erkannten schnell die Vorteile des neuen Werbemediums: Von staatlicher Seite war eine vorherige Zensur der Inhalte möglich. Werbekunden konnten sich darauf verlassen, dass ihre Plakate auch wirklich für die gesamte gemietete Zeit ohne Überklebungen zu sehen sein würden.

Quelle: www.de.wikipedia.org.

Quelle: www.de.wikipedia.org.

2.28. Die Walze einer Baumaschine hat den Durchmesser 1,2 m und ist 2 m breit. Welche Fläche wird von der Walze mit einer Umdrehung überfahren?

2.29. Wie verändert sich der Mantelflächeninhalt eines geraden Zylinders,

a) wenn man den Radius verdoppelt,

b) wenn man die Höhe verdreifacht,

c) wenn man Radius und Höhe gleichzeitig verdoppelt,

d) wenn man Radius und Höhe gleichzeitig verdreifacht,

e) wenn man Radius und Höhe gleichzeitig halbiert?

2.30. Wie verändert sich das Volumen eines Zylinders,

a) wenn man die Höhe verdoppelt,

b) wenn man die Höhe halbiert,

c) wenn man den Radius verdoppelt,

d) wenn man den Radius halbiert,

e) wenn man Höhe und Radius gleichzeitig verdoppelt,

f) wenn man Höhe und Radius gleichzeitig verdreifacht,

g) wenn man Höhe und Radius gleichzeitig halbiert?

h) wenn man Höhe und Radius gleichzeitig x-mal vervielfacht?

2.31. Ein rechteckiges Blatt mit den Seiten 10 cm und 6 cm kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gebogen werden.

a) Berechne das Volumen für beide Fälle.

b) Bestimme das Verhältnis der beiden Volumina.

2.32. Ein rechteckiges Blatt mit den Seiten a cm und b cm kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gebogen werden.

a) Berechne das Volumen für beide Fälle.

b) Bestimme das Verhältnis der beiden Volumina.

2.33. Das Volumen und der Oberflächeninhalt eines Zylinders besitzen dieselbe Maßzahl. Wie groß ist die Höhe, wenn seine Grundfläche den Radius 3 cm hat? Mache die Probe.

2.34. Das Volumen und der Oberflächeninhalt eines Zylinders besitzen dieselbe Maßzahl. Wie groß ist der Radius der Grundfläche, wenn seine Höhe die Länge 3 cm hat? Mache die Probe.

2.35. Ein Rechteck mit den Seiten 8 cm und 6 cm dreht sich im Raum um die längere Seite. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Zylinders.

2.36. Ein Rechteck mit den Seiten 8 cm und 6 cm dreht sich im Raum um die kürzere Seite. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Zylinders.

2.37. Bei Rotation des Rechtecks mit den Seiten 4 cm und 3 cm um die beiden verschiedenen Achsen entsteht jeweils ein Zylinder.

a) Berechne für beide Fälle jeweils Mantelflächeinhalt, Oberflächeninhalt und Volumen.

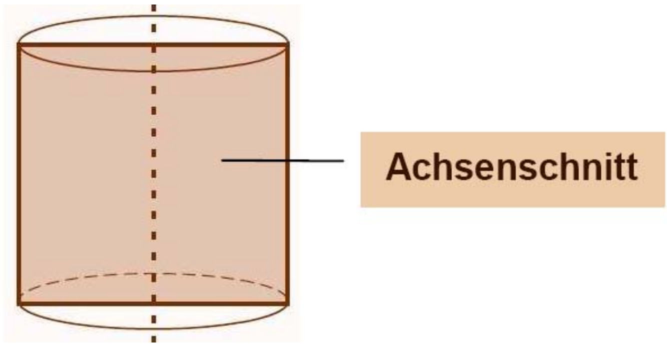
b) Was fällt dir beim Vergleich der Ergebnisse auf?

2.38. Bei Rotation des Rechtecks mit den Seiten a cm und b cm um die beiden verschiedenen Achsen entsteht jeweils ein Zylinder.

a) Berechne für beide Fälle jeweils Mantelflächeinhalt, Oberflächeninhalt und Volumen.

b) Was fällt dir beim Vergleich der Ergebnisse auf?

Ein Schnitt der entlang der Achse durchgeführt wird, ergibt den ***Achsenschnitt*** *eines Zylinders. Die Schnittfläche ist ein Rechteck.*



2.39. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Quadrat, dessen die Diagonale $4\sqrt{6}$ cm lang ist.

a) Berechne das Volumen des Zylinders.

b) Berechne den Mantelflächeinhalt dieses Zylinders.

c) Berechne den Oberflächeinhalt dieses Zylinders.

2.40. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck, dessen die Diagonale $8\sqrt{5}$ cm lang ist. Die Körperhöhe ist doppelt so lang wie der Grundkreisdurchmesser.

a) Berechne das Volumen des Zylinders.

b) Berechne den Mantelflächeinhalt dieses Zylinders.

c) Berechne den Oberflächeinhalt dieses Zylinders.

Kegel

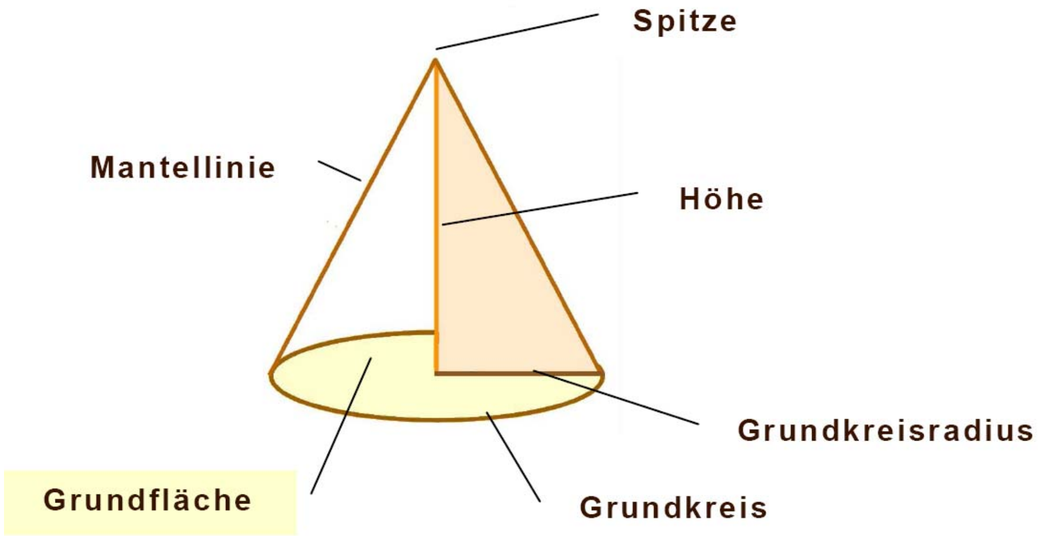
Ein **gerader Kegel** entsteht**,** wenn ein gleichschenkliges Dreieck um seine Symmetrieachse (**Drehachse**) rotiert.

Die von den Schenkeln des Dreiecks überstrichene Fläche heißt **Mantel des geraden Kegels**. Die von der Basis des Dreiecks überstrichene Fläche heißt **Grundfläche des Kegels**. Grundfläche und Mantel bilden die Oberfläche des Kegels.

Die Spitze der Dreieckfläche heißt **Spitze des Kegels**.

Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt **Höhe des Kegels**.

Die Verbindung eines Grundkreispunktes mit der Kegelspitze, heißt **Mantellinie** des Kegels.



Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

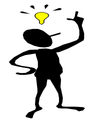
der Kegel, – - . . . .

überstreichen, **überstrich**, *hat* **überstrichen** - . . . .

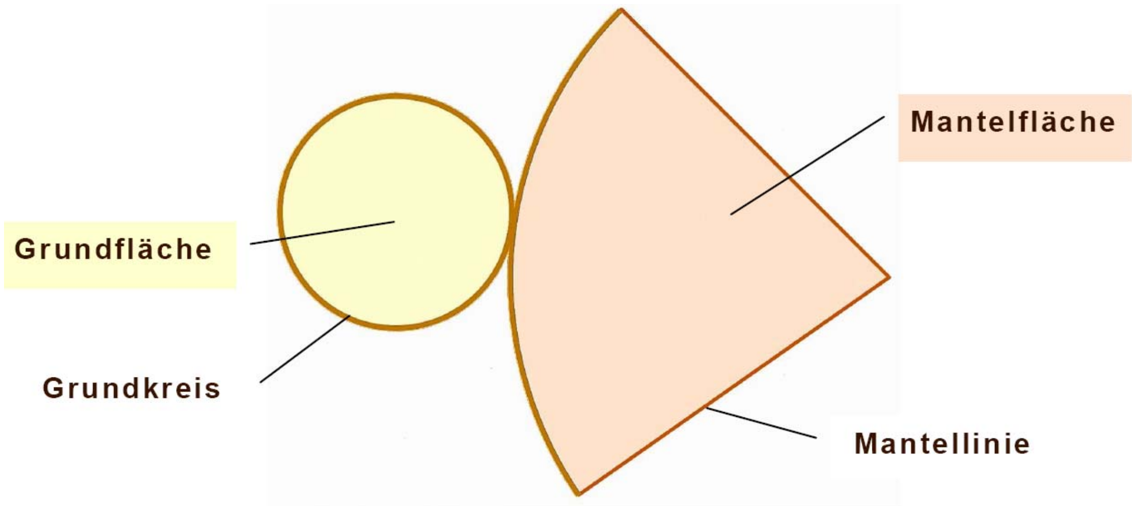
die Spitze des Kegels - . . . .

die Mantellinie des Kegels - . . . .

der Kreisausschnitt, -e - . . . .



Das Netz eines geraden Kegels besteht aus einer Kreisfläche, der Grundfläche des Kegels und aus einem Kreisausschnitt, dem Mantel des Kegels.
Der Radius des Kreisausschnittes ist die **Mantellinie** und die zugehörige **Bogenlänge** ist genau so lang wie der Umfang des Grundkreises.



Mantelfläche eines Kegels (Flächeninhalt des Mantels) A_M : $A_M = \pi r \cdot l$

Oberfläche A_O eines Kegels: $A_O = \pi r^2 + \pi r l = \pi r (r + l)$

Grundfläche πr^2 plus Mantelfläche $\pi r l$

Volumen V eines Kegels: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ein Drittel Grundfläche πr^2 mal Körperhöhe h

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Bogenlänge - . . . .

das Netz des Kegels - . . . .

der Neigungswinkel - . . . .

der Neigungswinkel zwischen Mantellinie und Grundfläche - . . . . . .

2.41. Wie verhalten sich Radius und Mantellinie eines Kegels, wenn

a) seine Mantelfläche genau so groß ist wie seine Grundkreisfläche?

b) seine Mantelfläche doppelt so groß ist wie seine Grundkreisfläche?

c) seine Mantelfläche *x*-mal so groß ist wie seine Grundkreisfläche?

2.42. Ein Halbkreis wird zu einem offenen Kegel geformt. Berechne den Radius, die Mantellinie und die Höhe des Kegels, wenn

a) die Bogenlänge 14π cm beträgt.

b) der Bogen 10π cm lang ist.

2.43. Ein Halbkreis mit dem Flächeninhalt von $64\pi\ \text{cm}^2$ wird zu einem offenen Kegel geformt. Berechne den Radius, die Mantellinie und die Höhe des Kegels.

2.44. Ein Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 120° und dem Radius 9 cm wird zu einem offenen Kegel zusammengebogen. Wie groß ist sein Rauminhalt?

2.45. Der Mantel eines Kegels wird aus einem Kreisausschnitt mit Mittelpunktswinkel α und Radius 12 cm gebildet. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen des Kegels, für:

a) den Mittelpunktswinkel $\alpha = 90^{\circ}$,

b) den Mittelpunktswinkel $\alpha = 180^{\circ}$,

c) den Mittelpunktswinkel $\alpha = 270^{\circ}$.

2.46. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 2 cm bildet den Achsenschnitt eines Kegels. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses Kegels.

2.47. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis 6 cm und Höhe 4 cm bildet den Achsenschnitt eines Kegels. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses Kegels.

2.48. Ein Kegel hat einen Grundkreisdurchmesser von 10 cm. Der Neigungswinkel zwischen Mantellinie und Grundfläche beträgt 60°. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses Kegels.

2.49. Der Grundkreisdurchmesser eines Kegels ist 12 cm lang. Der Neigungswinkel zwischen Mantellinie und Grundfläche beträgt 30°. Berechne den Oberflächeninhalt und den Rauminhalt dieses Kegels.

2.50. Eine rechtwinklige Dreiecksfläche mit den Katheten 8 cm und 6 cm wird im Raum **um die längere Kathete** gedreht. Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen des entstandenen Kegels?

2.51. Eine rechtwinklige Dreiecksfläche mit der Hypotenuse 13 cm wird im Raum **um eine ihrer Katheten** gedreht. Es entsteht ein Kegel mit dem Oberflächeninhalt $90\,\pi\,\text{cm}^2$. Wie lang sind die Katheten des Dreiecks?

2.52. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Hypotenuse 12 cm wird **um eine Kathete** gedreht. Welchen Rauminhalt und welchen Oberflächeninhalt hat der entstehende Körper?

2.53. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Hypotenuse 10 cm wird **um die Hypotenuse** gedreht. Welchen Rauminhalt und welchen Oberflächeninhalt hat der entstehende Körper?

2.54. Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt einen Winkel von 30°. Die Hypotenuse ist 10 cm lang. Dieses Dreieck wird **um die kürzere Kathete** gedreht. Berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt des entstehenden Körpers.

2.55. Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt einen Winkel von 30°. Die Hypotenuse ist 10 cm lang. Dieses Dreieck wird **um die längere Kathete** gedreht.
Berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt des entstehenden Körpers.

2.56. Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt einen Winkel von 30°. Die Hypotenuse ist 10 cm lang. Dieses Dreieck wird um die Hypotenuse gedreht.
Berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt des entstehenden Körpers.

2.57. Eine Raute mit den Diagonalen 8 cm und 6 cm wird **um die kürzere Diagonale** gedreht.

a) Berechne den Oberflächeninhalt des entstehenden Doppelkegels.

b) Berechne das Volumen des entstehenden Doppelkegels.

2.58. Eine Raute mit den Diagonalen 24 cm und 10 cm wird **um die längere Diagonale** gedreht.

a) Berechne den Oberflächeninhalt des entstehenden Doppelkegels.

b) Berechne das Volumen des entstehenden Doppelkegels.

Vermischte Abiaufgaben

2.59. Ein gerades Prisma mit der Höhe 5 cm hat als Grundfläche eine Raute mit der Seitenlänge 6 cm und der Höhe 3 cm.
Berechnen Sie den Grundflächeninhalt dieses Prismas.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas.
Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.

2.60. Ein gerades Prisma mit der Höhe 10 cm hat als Grundfläche eine Raute, dessen Diagonalen 8 cm und 6 cm lang sind.
Berechnen Sie den Grundflächeninhalt dieses Prismas.
Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas.

2.61. Ein gerades Prisma mit der Höhe 10 cm hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite 6 cm und der Höhe 3 cm.
a) Berechnen Sie die Oberflächeninhalt dieses Prismas.
b) Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.

2.62. Ein gerades Prisma mit der Höhe 10 cm hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten 10 cm und 4 cm und mit den Schenkel 5 cm.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas.
Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.

2.63. Ein quadratisches Stück Papier wird einmal zum Mantel eines Zylinders gebogen, ein zweites Mal wird daraus der Mantel eines Kegels geschnitten. Wie viel Prozent des Zylindervolumens macht das Kegelvolumen aus?

2.64. Einer Kugel ist ein Zylinder einbeschrieben. Die Höhe des Zylinders ist 4-mal so lang wie der Grundkreisradius. Berechnen Sie das Verhältnis des Zylindervolumens zum Kugelvolumen. Machen Sie eine Skizze.

2.65. Die Höhe einer quadratischen Pyramide ist 12 cm lang. Die Höhen der gegenüberliegenden Seiten der Pyramide bilden einen Winkel von 60°. Machen Sie eine Skizze. Berechnen Sie den Mantelflächeninhalt dieser Pyramide.

2.66. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck, dessen Seiten 6 cm und 8 cm lang sind. Alle Seitenkanten dieser Pyramide sind 13 cm lang.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieser Pyramide.

2.67. Ein quadratisches Prisma hat eine Grundseite von 8 cm. Die Raumdiagonale dieses Prismas bildet mit der Grundfläche einen Winkel mit dem Sinuswert 0,6.

a) Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas.
b) Berechnen Sie den Radius der umbeschriebenen Kugel.
c) Berechnen Sie das Volumen dieser Kugel.
d) Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Volumina.

2.68. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck. Der Schenkel mit der Länge 6 cm bildet mit der Grundfläche einen Winkel, dessen Cosinuswert $\frac{\sqrt{5}}{3}$ beträgt.

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Kegels.
b) Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

2.69. Ein Kegel mit Radius 6 cm und Höhe 10 cm wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei Teilkörper zerlegt. Der Abstand der Schnittfläche von der Spitze ist 5 cm lang. Berechnen Sie die Größe der Schnittfläche und die Volumina der Teilkörper.

2.70. Eine Raute mit dem Flächeninhalt von 24 cm^2 wird um die längere Diagonale gedreht. Der Oberflächeninhalt des entstehenden Doppelkegels beträgt $30\,\pi\text{ cm}^2$. Wie lang sind die Seiten der Raute?

2.71. Eine Raute mit dem Flächeninhalt von 120 cm^2 wird um die kürzere Diagonale gedreht. Der Oberflächeninhalt des entstehenden Doppelkegels beträgt $312\pi\text{ cm}^2$. Wie lang sind die Seiten der Raute?

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundlagen

Die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreibt die Entwicklung eines gleichzeitig alten und modernen Teilgebiets der Mathematik. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit der Aufgabe, das Zufällige, also das Unberechenbare, doch berechenbar zu machen.

In den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränkte sich ihr Anwendungsgebiet zunächst nur auf Glücksspiele. In den letzten Jahrzehnten hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Praxis eine immer größere Bedeutung erlangt und ist für alle Zweige der Naturwissenschaften, der Wirtschaft und Technik unentbehrlich geworden. Heute kommt man bei ökonomischen und technischen Berechnungen ohne sie nicht mehr aus.

Als Begründer der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man die Mathematiker **Pascal** (1628 bis 1662) und **Fermat** (1601 bis 1665) ansehen. Pierre de Fermat und Blaise Pascal (1623-1662) wechselten 1654 einige Briefe zu Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ausgangspunkt war die Frage, wie der Einsatz eines Glücksspieles zwischen zwei gleichwertigen Partnern bei vorzeitigem Abbruch des Spieles gerecht aufzuteilen ist. Dabei kamen beide - Fermat und Pascal - unabhängig voneinander zu dem gleichen Ergebnis und legten einen Grundstein für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie begann mit dem Briefwechsel zwischen Blaise Pascal (1623 –1662) und Pierre de Fermat (1607/8 – 1665) im Jahre **1654**. Das Wort *Wahrscheinlichkeit* kommt im gesamten Briefwechsel nicht vor.

Jakob Bernoulli (1655 – 1705) hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie beigetragen. Eines seiner wichtigen Werke die *"Ars Conjectandi"* (*„Kunst des Vermutens"*), das erste grundlegende Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wurde erst 1713, also acht Jahre nach seinem Tod, in Basel veröffentlicht. Das Buch fasste Arbeiten anderer Autoren auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen und entwickelte sie weiter.

Jakob Bernoulli

ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI
publicata,
POTENTISSIMO SERENISSIMO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R.IMPERII ARCHIMARESCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
LIPSIÆ,

„Kunst des Vermutens"
www.wikipedia.pl
Bild 3.1

Das Erscheinen von **Andrei Kolmogorows** (1903 – 1987) Lehrbuch *„Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung"* im Jahr 1933, schloss die Entwicklung der Grundlagen moderner Wahrscheinlichkeitstheorie ab.

Andrei Kolmogorow
www.wikipedia.de
Bild 3.2

Zufallsexperiment

Experimente, deren **Ergebnis** zufällig ist, nennt man **Zufallsexperimente**. Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zur so genannten **Ergebnismenge** Ω zusammen. Für die Anzahl der Elemente einer Menge Ω schreibt man $\overline{\overline{\Omega}}$. Nebenstehend werden diese Begriffe am Beispiel des Würfelns mit einem Würfel verdeutlicht.

Zufallsexperiment: Würfelwurf
mögliche Ergebnisse: Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6
Ergebnismenge: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\overline{\overline{\Omega}} = 6$

Jede Teilmenge von Ω entspricht einem so genannten **Ereignis**. Ereignisse gibt man als Menge mit großen Buchstaben A, B, C, E_1, E_2, … an.
Für die Anzahl der Elemente eines Ergebnisses A schreibt man $\overline{\overline{A}}$.

Das Ereignis:
E – „Es fällt eine ungerade Zahl"
lässt sich durch die Ergebnismenge
$E = \{1, 3, 5\}$ darstellen.
$\overline{\overline{E}} = 3$

Die einelementigen Ereignisse werden als **Elementarereignisse** bezeichnet.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

Besondere Ereignisse sind das **unmögliche Ereignis,** das nie eintreten kann, da es keine Ergebnisse enthält, sowie das **sichere Ereignis** $A = \Omega$ das stets eintritt, da es alle Ergebnisse enthält.

Das unmögliche Ereignis:
A – „Es fällt eine zweistellige Zahl"

Das sichere Ereignis:
B – „Es fällt eine natürliche Zahl, die größer als 0 und kleiner als 7 ist"

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf polnisch?

das Elementarereignis - . . . .

das Ereignis - . . . .

das sichere Ereignis - . . . .

das unmögliche Ereignis - . . . .

das Ergebnis - . . . .

die Ergebnismenge - . . . .

das Zufallsexperiment - . . . .

Ein Vorgang ist genau dann ein Zufallsexperiment, wenn:

1) von allen möglichen Ergebnissen genau eines eintritt,
2) alle möglichen Ergebnisse bekannt sind,
3) es nicht möglich ist vor Ablauf des Vorganges vorherzusagen, welches Ergebnis das Experiment haben wird.

3.1. Ergänze:

Eine Münze wird zweimal geworfen. A - es fällt einmal Kopf und einmal Zahl.

Zahl Kopf

Bild 3.3

Zufallsexperiment:. . . . .

. . . .

Mögliche Ergebnisse:. . . . .

Ergebnismenge/Ergebnisraum: Ω = ...

Ereignis: A = ...

In Aufgaben 3.2. – 3.4.: Bestimme den Ergebnisraum und stelle die Ereignisse als Teilmenge der Ergebnismenge dar.

3.2. Ein Würfel wird zweimal nacheinander gewürfelt

a) A - die Augensumme beträgt 7,

b) B - die Augensumme ist eine ungerade Zahl,

c) C - die erste Zahl ist eine Primzahl,

d) D - das Produkt der Zahlen ist 6,

e) E - die Summe ist durch 4 teilbar.

www.wikipedia.pl
Bild 3.4

3.3. Aus dem Alphabet wird ein Buchstabe gezogen

a) A - es wird ein Buchstabe aus der Menge A gezogen,

b) B - es wird eine Buchstabe aus der Meng B gezogen.

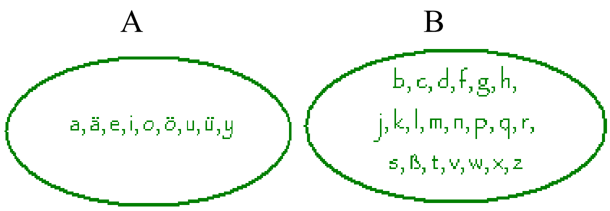


Bild 3.5

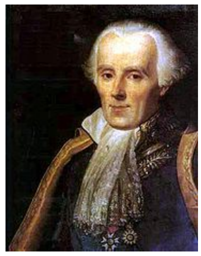
3.4. Aus einer Urne mit 4 roten , 3 gelben und 5 schwarzen Kugeln wird eine Kugel gezogen:

a) A – es wird eine rote Kugel gezogen,

b) B – es wird keine schwarze Kugel gezogen,

c) C – es wird eine schwarze oder eine gelbe Kugel gezogen.

Laplace – Formel



Eine Definition des Begriffes *Wahrscheinlichkeit* wurde erstmals von **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) gegeben. Man bezeichnet sie als *klassische Definition*. Laplace formulierte darüber hinaus die Regeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

Pierre-Simon Laplace
(1749 -1827)
war ein französischer Mathematiker und Astronom. Er beschäftigte sich unter anderem mit der Wahrscheinlichkeitstheorie. In seinem zweibändigen Werk Théorie Analytique des Probabilités (1812) gab Laplace eine Definition der Wahrscheinlichkeit.
www.wikipedia.pl
Bild 3.6

Laplace - Formel

Haben alle Ergebnisse eines Zufallsexperimentes die gleiche Wahrscheinlichkeit, so gilt für die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel 3.1

Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Die Ergebnismenge enthält Zahlenpaare. A -“Augensumme ist 5”. Anzahl der für A günstigen Ergebnisse ist 4, Anzahl der möglichen Ergebnisse ist 36..

Ω = {	11	12	13	**14**	15	16
	21	22	**23**	24	25	26
	31	**32**	33	34	35	36
	41	42	43	44	45	46
	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66}

Also gilt: $P(A) = \frac{4}{36}$.

3.5. Eine Urne enthält 11 Kugeln, welche die Zahlen 20 bis 30 tragen. Das Zufallsexperiment besteht aus dem Ziehen einer Kugel und Feststellen ihrer Nummer. Gib die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an:

- **a)** A – Die Quersumme der Kegelnummer ist gröβer als 8,
- **b)** B - Die Quersumme der Kegelnummer ist eine gerade Zahl und durch 4 teilbar,
- **c)** C - Die Anzahl der Teiler der Kugelnummer beträgt mindestens 6,
- **d)** D – Die Kugelnummer ist eine Primzahl.

3.6. Eine Lostrommel enthält Lose. Die Hälfte sind Nieten, 60% des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose sind Gewinne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste gezogene Los:

a) Ein Trostpreis, **b)** ein Gewinnlos, **c)** keine Niete?

3.7. Eine grüne und eine rote Kugel werden zufällig auf drei Kästchen verteilt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

- **a)** A – Kästchen 3 ist leer,
- **b)** B – Zwei Kästchen sind leer,
- **c)** C – Genau ein Kästchen ist leer.

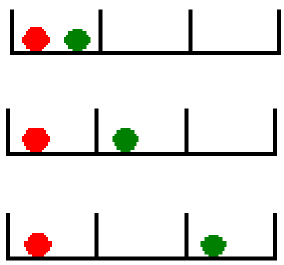


Bild 3.7

3.8. Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Gib die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse an:

- **a)** Die erste Augenzahl ist kleiner als die zweite,
- **b)** das Produkt beider Augenzahlen ist größer als 15,
- **c)** die Summe beider Augenzahlen ist kleiner als 7.

3.9. Ein roter und ein grüner Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis:

- **a)** Der rote Würfel zeigt eine kleinere Augenzahl als der grüne Würfel,
- **b)** der rote Würfel zeigt die gleiche Augenzahl wie der grüne Würfel,
- **c)** die Augensumme beider Würfel ist größer als 10.

3.10. Ein Dopplerwürfel wird einmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- **a)** Die Augenzahl ist durch 16 teilbar,
- **b)** die Augenzahl ist Vielfaches der Zahl 8.

Backgammon *ist eines der ältesten Brettspiele der Welt. In Backgammon - Wettkämpfen kommt ein besonderer Würfel zum Einsatz, der* ***Dopplerwürfel*** *genannt ist. Er wird mit den Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64 beschriftet.*
www.wikipedia.de
Bild 3.8

3.11. Ein Dopplerwürfel wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
A – das Produkt beider Augenzahlen ist größer als 216.

3.12. Beim Würfelspiel „Fuchs und Hase" wird mit einem roten und einem blauen Würfel zugleich geworfen. Der Fuchs darf um so viel Felder vorrücken, wie der rote Würfel Augen zeigt, der Hase um so viele Felder, wie der blaue Augen zeigt.
Der Hase hat drei Felder Vorsprung. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ereignisse:

- **a)** Fuchs und Hase treffen auf demselben Feld zusammen,
- **b)** Der Fuchs nähert sich dem Hasen.

3.13. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim Lotto “6 aus 49” die erste gezogene Zahl ungerade?

3.14. In einem Kasten liegen 7 rote und 5 gelbe Bälle.
Wie groβ ist die Wahrscheinlichkeit:

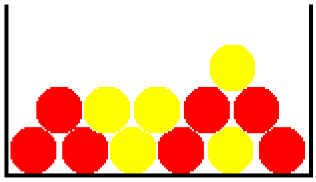


Bild 3.9

a) einen gelben Ball zu ziehen,

b) einen roten Ball zu ziehen,

c) einen roten Ball zu ziehen, nachdem zwei rote und drei gelbe Bälle entfernt werden?

3.15. Aus einer Urne wird eine Kugel gezogen. Die Urne enthält 55 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 55. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl auf der gezogenen Kugel die Ziffer 5 nicht enthält.

3.16. In einem Kasten liegen 20 Zettel, die von 1 bis 20 nummeriert sind.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse bei einmaliger Ziehung:

a) es wird eine gerade Zahl gezogen,

b) es wird eine durch 4 teilbare Zahl gezogen,

c) es wird eine Zahl gezogen, die durch 4 oder durch 3 teilbar ist,

d) es wird eine Zahl gezogen, die das Vielfache von 3 ist.

3.17. Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groβ ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

a) von drei Würfen zeigen zwei Würfe Kopf,

b) die beiden letzten Würfe zeigen Zahl,

c) der dritte Wurf zeigt Kopf?

3.18. Das nebenstehende Bild zeigt ein Straβennetz.
Peter möchte auf dem kürzesten Wege von A nach B.
Er wählt einen der möglichen Wege aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er am Punkt C vorbei?

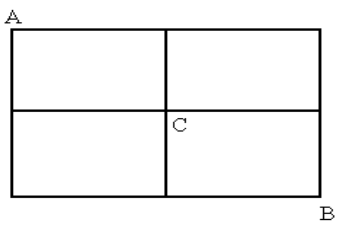


Bild 3.10

3.19. Ein Glücksrad (Bild 3.11) wird zweimal gedreht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ist die zweite Zahl gröβer als die erste,

b) erhalten wir zweimal dieselbe Zahl?

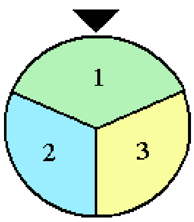


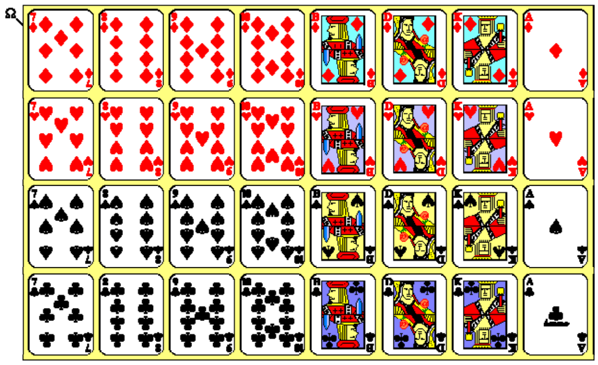
Bild 3.11

3.20. Ein Skatblatt besteht aus 32 Karten:
8 mal Pik ♠, 8 mal Herz ♥, 8 mal Karo ♦,
8 mal Kreuz ♣.
Jede Farbe enthält 4 Luschen (7, 8, 9 ,10)
und 4 Figuren (Bube, Dame, König, As) .
Es wird eine Karte gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es der Pik – Bube?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Pik – Karte?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Lusche?



www.wikipedia.de
Bild 3.12

Baumdiagramme

Werden zwei Zufallsexperimente nacheinander durchgeführt, so kann man dies auch als ein einziges Zufallsexperiment auffassen. Man spricht dann von einem zweistufigen Zufallsexperiment. Seine Ergebnisse kann man als Paare angeben. Die Ergebnisse bei einem dreistufigen Zufallsexperiment heiβen Tripel, allgemein nennt man die Ergebnisse bei einem n – stufigen Zufallsexperiment n – Tupel.

Beispiel 3.2

Eine Urne enthält 4 rote und 6 blaue Kugeln. Man zieht zufällig nacheinander zwei Kugeln, ohne dabei die zuerst gezogene Kugel zurückzulegen (**Ziehen ohne Zurückzulegen** im Unterschied zum **Ziehen mit Zurückzulegen**).
Beobachtet wird die Farbfolge.

Es ist ein **zweistufiges Zufallsexperiment.**
Der Baum besteht aus zwei **Stufen**, deren Zweige **Pfade** der Länge zwei bilden.
Die Ergebnismenge ist Ω = {rr, rb, br, bb}.
Bei der ersten Ziehung ist die Urne zu $\frac{4}{10}$ mit roten und zu $\frac{6}{10}$ mit blauen Kugeln gefüllt.

Baumdiagramm

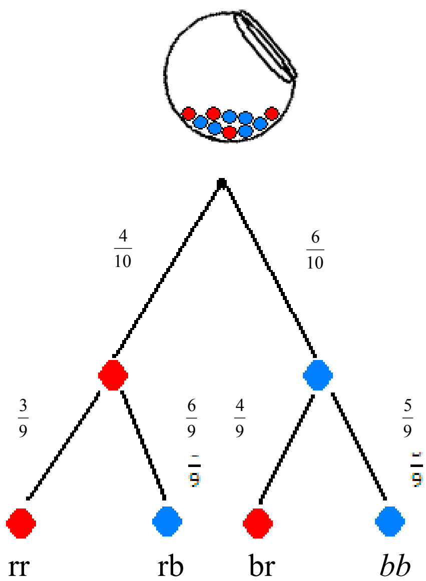


Bild 3.13

Die Zusammensetzung der Urne nach der ersten Ziehung hat sich geändert.

Es gibt die folgenden zwei Pfadregeln:

1) *Die **„Pfadmultiplikationsregel"** besagt, dass längs eines Pfades die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden.*

Nach den Pfadregeln erhält man z. B. für das Ereignis:

A – „die erste Kugel ist rot, die zweite ist blau": $P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$.

2) *Die **Summenregel** besagt für den Fall, dass mehrere Pfade zum Ereignis führen, dass die Einzel-Wahrscheinlichkeiten addiert werden.*

Nach den Pfadregeln erhält man z. B. für das Ereignis:

B – „die zweite Kugel ist rot": $P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{5}$.

3.21. In einer Urne liegen 5 grüne und 2 gelbe Kugeln. Es sollen nacheinander zwei Kugeln mit

a) Zurücklegen,

b) ohne Zurücklegen

gezogen werden. Zeichne den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbaum und bestimme alle Pfadwahrscheinlichkeiten.

3.22. Eine Urne enthält drei rote und fünf grüne Kugeln. Aus der Urne werden ohne Zurücklegen zufällig drei Kugeln gezogen. Bild 3.14 zeigt einen Ausschnitt aus dem zugehörigen Baumdiagramm.

a) Erkläre die Wahrscheinlichkeiten, die an den einzelnen Pfaden in Bild 3.14 stehen,

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle drei gezogenen Kugeln grün?

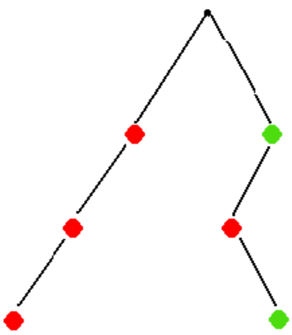


Bild 3.14

3.23. Zeichne ein Baumdiagramm zum dreimaligen Werfen einer Münze und gib den Ergebnisraum an. Aus wie vielen Stufen besteht das Baumdiagramm? Markiere alle Pfade, die zum Ereignis A – „ mindestens zweimal Zahl" gehören.

3.24. Bei einem Multi-Choice-Test werden zu jeder der vier Fragen drei Antwortmöglichkeiten angeboten, von denen stets genau eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens drei der vier Fragen richtig beantwortet werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht man den Test bei zufälligem Ankreuzen?

3.25. Ein Würfel, der wie der Rubikwürfel aussieht - seine Seiten sind gelb, rot, blau, weiß, grün, orange - wird in 27 kleine Würfel geschnitten. Diese Würfel wirft man in einen Kasten. Es werden zwei Würfel nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

a) Beide Würfel haben zwei bemalten Seitenflächen,

b) Beide Würfel haben eine rote Seitenfläche.

www.wikipedia.pl
Bild 3.15

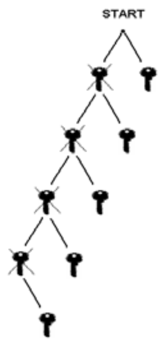
3.26. In einem Geldbeutel sind 20 Geldstücke: sechs 1€ - Münze, neun 2€ - Münze und fünf 5€ - Münze. Man zieht nacheinander drei Geldstücke heraus, ohne sie wieder zurückzulegen. Zeichne einen Baumdiagramm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit:

a) Zehn Euro zu ziehen, **b)** Weniger als fünf Euro zu ziehen?

3.27. In einem Kasten liegen 5 ziemlich gleich aussehende Schlüssel. Genau einer davon ist der zur Tür passende Schlüssel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Beim ersten Ausprobieren der richtige Schlüssel gefunden wird?

b) Beim vierten Ausprobieren der richtige Schlüssel gefunden wird?



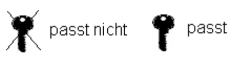


Bild 3.16

3.28. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist 0,48. Wir betrachten irgendeine Familie mit drei Kindern. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, mit der:

a) alle Kinder Jungen sind,

b) die ersten zwei Kinder Jungen sind,

c) eines der Kinder ein Mädchen ist?

3.29. Bei der Serienfertigung von wertvollen Vasen wird bei jeder Vase erst die Form und dann die Farbe überprüft. Aufgrund langer Erfahrungen kennt man die in Bild 3.17 angegeben Wahrscheinlichkeiten. Nach der Prüfung werden die Vasen in drei Klassen eingeteilt:

1. Wahl: Form und Farbe gut;
2. Wahl: Entweder Form oder Farbe gut;
3. Ausschuss: Form und Farbe nicht gut.

Eine Vase wird zufällig ausgewählt. Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie 1. Wahl, 2. Wahl bzw. Ausschuss ist.

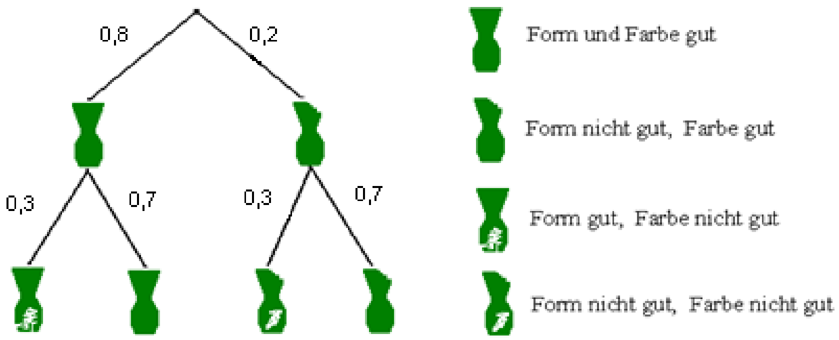


Bild 3.17

3.30. Die Ausschusswahrscheinlichkeit bei der Produktion eines Artikels beträgt 4%. Was ist wahrscheinlicher:

a) Keine defekten Stücke unter 5 Stücken?

b) Kine defekten Stücke unter 4 Stücken?

3.31. Ein Student darf bei einer Prüfung 2 von 30 Prüfungsfragen ziehen. Er hat 25 Fragen gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

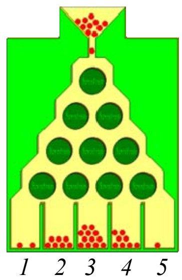
a) beide Fragen,

b) die erste, aber nicht die zweite Frage,

c) mindestens eine Frage beantworten kann?

3.32. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Kugel in dem Galtonbrett (Bild 3.18) in das Fach:

a) 1, **b)** 2 , **c)** 3?



www.wikipedia.de

Bild 3.18

3.33. Eine Urne enthält den Buchstaben „S“ zwei Mal, den Buchstaben „A“ drei Mal, den Buchstaben „R“ ein Mal.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SARA“ beim viermaligen Ziehen ohne Zurücklegen zu ziehen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „AAS“ beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zu ziehen?

3.34. In einer Klasse mit 10 Mädchen und 15 Jungen werden zwei Klassensprecher zufällig gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) beide Klassensprecher Mädchen sind?

b) beide Jungen sind?

c) der erste ein Junge und der zweite ein Mädchen ist?

d) der erste ein Mädchen und der zweite ein Junge ist?

e) ein gemischtes Pärchen entsteht?

3.35. Peter gewinnt mit 40% Wahrscheinlichkeit beim Tennis gegen Paul. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Peter von 4 Partien

a) alle gewinnt,

b) keine gewinnt,

c) genau zwei gewinnt.

3.36. In einer Schublade befinden sich einzelne Socken. Es sind 8 schwarze, 6 weiße und 2 rote Socken. Du ziehst einen Socken an, merkst dir die Farbe und legst ihn wieder zurück. Dann ziehst du ein zweites Mal und notierst dir wieder die Farbe.

a) Zeichne das Baumdiagramm.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du die gleiche Farbe notiert hast.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du verschiedene Farbe notiert hast.

Schnitt und Vereinigung von Ereignissen

$A, B \subset \Omega$ seien zwei beliebige Ereignisse.

Dann sind die Vereinigung ($A \cup B$), der Schnitt ($A \cap B$) und die Differenz ($A \setminus B$) ebenfalls Ereignisse.

→ $A \cup B$ tritt genau dann ein, wenn wenigstens eines der beiden Ereignisse A, B eintritt (A tritt ein oder B tritt ein)

→ $A \cap B$ tritt genau dann ein, wenn sowohl A als auch B eintritt (A tritt ein und B tritt ein)

→ $A \setminus B$ tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt

Ist Ω der Ergebnisraum und A ein beliebiges Ereignis, so bezeichnet man das Ereignis $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega} \setminus \mathbf{A}$ als **Gegenereignis** zu **A**.

Wenn A und A' Gegenereignisse sind, dann gilt:

$\mathbf{A \cap A' = \emptyset}$, $\quad$ $\mathbf{A \cup A' = \Omega}$, $\quad$ $\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}$.

Beispiel 3.3

Ω sei die Menge der Zahlen von 1 bis 15. A, B sind Ereignismengen: $A = \{1, 2, 5, 7, 10, 12\}$, $B = \{7, 8, 10, 11, 12\}$. Gib die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ in aufzählender Form an.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

Lösung

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$,

$\overline{\overline{\Omega}} = 15$,

$A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 12\}$,

$\overline{\overline{A \cup B}} = 8$, $\quad P(A \cup B) = \frac{8}{15}$,

$A \cap B = \{7, 10, 12\}$,

$\overline{\overline{A \cap B}} = 3$, $\quad P(A \cap B) = \frac{3}{15}$,

$A \setminus B = \{1, 2, 5\}$,

$\overline{\overline{A \setminus B}} = 3$, $\quad P(A \setminus B) = \frac{3}{15}$.

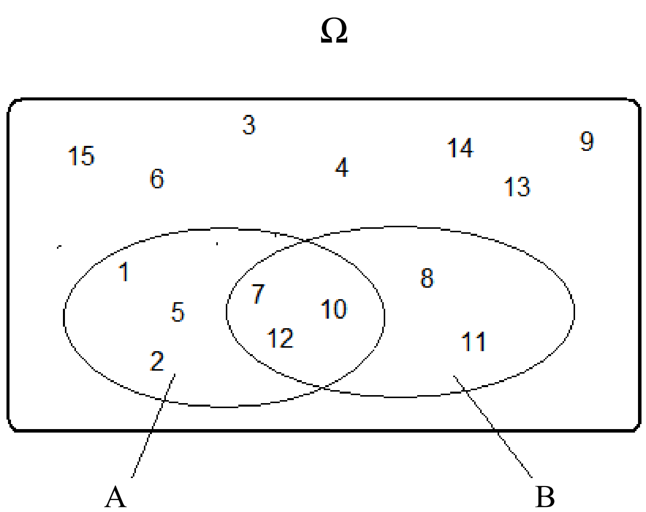


Bild 3.19

Beispiel 3.4

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$

$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, $\bar{\bar{A}} = 7$,

$A' = \{4, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15\}$, $\bar{\bar{A'}} = 8$,

$A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = \Omega$,

$P(A) = \frac{7}{15}$, $P(A') = \frac{8}{15}$,

$P(A') = 1 - P(A)$.

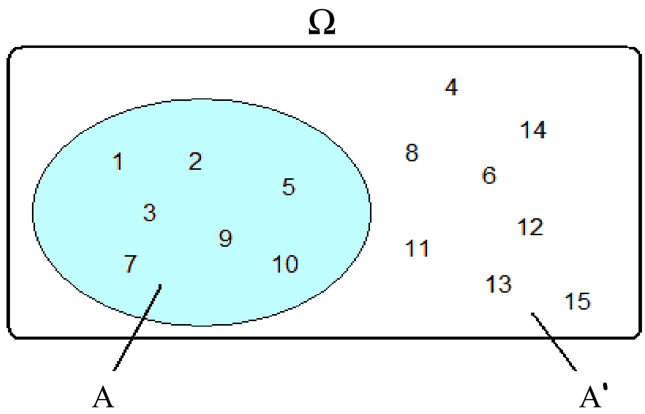


Bild 3.20

Beispiel 3.5

Wenn man eine Münze wirft, muss entweder Kopf oder Zahl oben liegen. „Kopf" ist somit das Gegenereignis von „Zahl" und umgekehrt.

Beispiel 3.6

Wenn bei einem Kartenspiel die Farbe nicht rot ist, muss sie schwarz sein. Daraus ergibt sich, dass „rot" das Gegenereignis von „schwarz" ist und umgekehrt.

3.37. Die Ergebnismenge eines Würfels ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Folgende Ereignisse werden festgelegt: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{2, 4\}$.

a) Bestimme $A \cap B$ sowie $A \cap C$ und $B \cup C$.

b) Bestimme A' sowie $(A \cap B)'$ und $\Omega \setminus B$.

3.38. Die Punkte auf dem Bild sind elementare Ereignisse. Gib die Menge der Ereignisse an:

a)

$A \cap B$	$A \cap B'$
$A \cup B$	$A' \cup B$
A'	$A' \cap B'$
B'	$A' \cup B'$
$A \setminus B$	$A' \setminus B$
$B \setminus A$	$B' \setminus A$

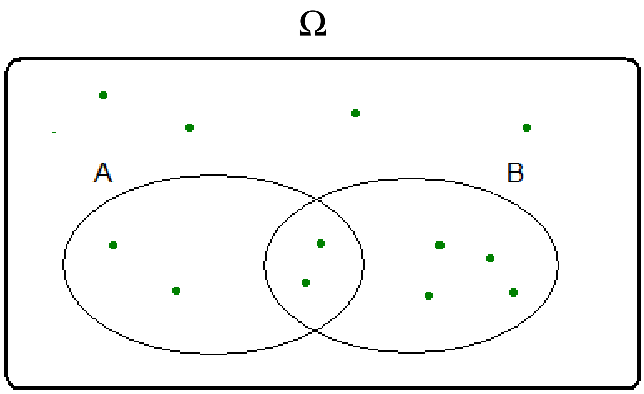


Bild 3.21

b) A, B, C,

A', B', C'

$A' \cap B' \cap C'$

$(A' \cup B') \cap C'$

$A \cap (B' \cup C')$

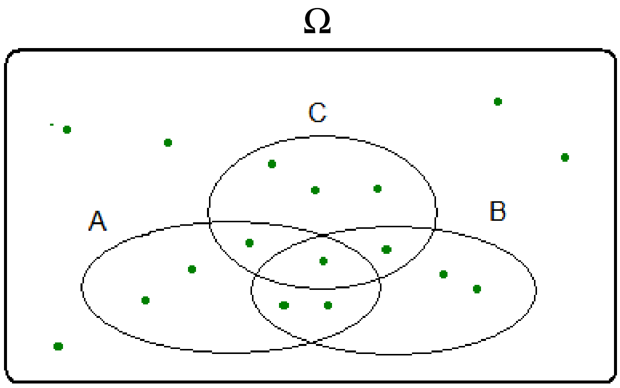


Bild 3.22

3.39. Ein Würfel wird geworfen. Folgende Ereignisse werden festgelegt:

A – Die Augenzahl ist eine gerade Zahl, B – Die Augenzahl ist mindestens gleich 4.

Berechne: $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{B}'$, $\overline{A' \cup B}$, $\overline{A' \cap B'}$.

3.40. Wir werfen einen Würfel. Finde die Menge der Gegenereignisse:

A_1 - Die Augenzahl ist kleiner als 4

A_2 - Die Augenzahl ist durch drei teilbar

A_3 - Die Augenzahl ist eine Primzahl

A_4 - Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl

$A_5 = \{2, 3, 5\}$

A_6 – Die Augenzahl ist größer al 3

$A_7 = \{1, 2, 4, 5\}$

$A_8 = \{1, 3, 5\}$.

3.41. Wir werfen eine Münze viermal. Finde die Gegenereignisse zu den Ereignissen:

a) B_1 – Kopf fällt mindestens einmal,

b) B_2 – Zahl fällt genau so oft wie Kopf.

3.42. Aus einem Skatblatt mit 32 Karten wird zufällig eine Karte gezogen. Es gibt folgende

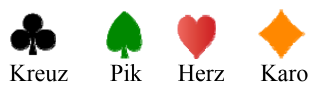
Ergebnisse:

K – es wird eine Karokarte gezogen,

F – Es wird eine Figur gezogen,

L – Es wird eine Lusche (7, 8, 9, 10) gezogen,

B – Es wird ein Bube gezogen.



www.wikipedia.de

Bild 3.23

Formuliere folgende Ergebnisse in Worten und bestimme ihre Wahrscheinlichkeiten:

$K \cup B$ $K \cap F$ $K \cap B$ $K \cup F$ $K' \cap F$ $B \cup F'$.

3.43. In einer Urne liegen einhundert Kugeln mit den Nummern 1 bis 100. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Nummer keine 2 enthält?

3.44. Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

a) die beiden Würfel unterschiedliche Augenzahlen zeigen?

b) das Produkt der beiden Augenzahlen kleiner als 32 ist?

c) die Summe der beiden Augenzahlen kleiner als 11 ist?

3.45. Eine Zahl wird aus der Menge der zweistelligen Zahlen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Ziffern größer als 3 ist?

3.46. Eine Münze wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

a) Kopf mindestens einmal auftritt,

b) Zahl höchstens dreimal auftritt.

3.47. Eine Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Augenzahlen eine gerade Zahl wird?

3.48. Ein Glücksrad mit 100 gleich großen von 1 bis 100 nummerierten Sektoren wird einmal gedreht. Formuliere die Ereignisse in Mengenschreibweise mit Hilfe der Ereignisse A und B und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten:

A – Die Zahl ist durch 12 teilbar B - Die Zahl ist durch 15 teilbar

a) Die Zahl ist nicht durch 12 teilbar,

b) Die Zahl ist nicht durch 15 teilbar,

c) Die Zahl ist durch 12 und durch 15 teilbar,

d) Die Zahl ist weder durch 12 noch durch 15 teilbar,

e) Die Zahl ist nicht durch 12 oder nicht durch 15 teilbar,

f) Die Zahl ist durch 12 oder durch 15 teilbar.

3.49. Bei einer bestimmten Krankheit tritt ein Symptom S_1 mit Wahrscheinlichkeit 0,6 und ein Symptom S_2 mit Wahrscheinlichkeit 0,5 auf. Beide Symptome zusammen werden an 15 % aller Fälle beobachtet. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

a) Ein Patient hat zwei Symptome.

b) Ein Patient hat mindestens eins der beiden Symptome.

c) Ein Patient hat keins der beiden Symptome.

Der Additionssatz

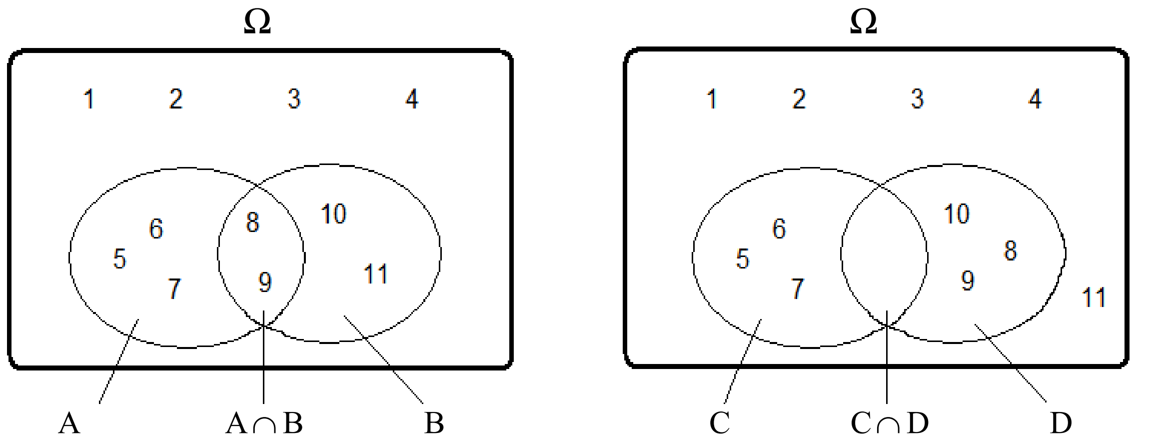
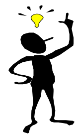


Bild 3.24



Ereignisse, wie A und B, die zugleich eintreten können, heißen **vereinbare** Ereignisse. Ihre Schnittmenge ist keine leere Menge: $A \cap B \neq \emptyset$.

Ereignisse, wie C und D, die nicht zugleich eintreten können, heißen **unvereinbare** Ereignisse. Ihre Schnittmenge ist die leere Menge: $C \cap D = \emptyset$.

Additionssatz für vereinbare Ereignisse:

Sind A und B vereinbare Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A oder B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Additionssatz für unvereinbare Ereignisse:

Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A oder B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Beispiel 3.7

Bei einem Glücksspiel werden aus zwei Urnen mit 5 roten Kugeln (von 1 bis 5 nummeriert) und 10 blauen Kugeln (von 1 bis 10 nummeriert) zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Als Gewinn zählt, wenn die Augensumme 12 ist oder wenn beide gezogenen Kugeln Zahlen unter 3 zeigen. Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeit.

Lösung

Wir wählen $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots (5, 10)\}$ als Ergebnismenge und setzen:

A – "Die Augensumme ist 12" und B – "Beide Kugeln haben Nummern unter 4".

Ein Gewinn ergibt sich, wenn das Ereignis $A \cup B$ eintritt.

Offenbar gilt: $A = \{(2, 10), (3, 9), (4, 7), (5, 6)\}$ mit $\overline{\overline{A}} = 4$ und $B = \{(1, 1), (2, 2)\}$ mit

$\overline{\overline{B}} = 2$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = \frac{4}{50} + \frac{2}{50} = \frac{6}{50}$.

3.50. Es ist bekannt, dass $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ und $P(A \cap B) = 0{,}3$. Berechne $P(A \cup B)$, $P(A' \cap B)$ und $P(A' \cup B')$.

3.51. Es ist bekannt, dass $P(A') = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ und $P(A \cup B) = 0{,}9$. Berechne

$P(A \cap B)$, $P(A' \cap B)$ und $P(A' \cap B')$.

3.52. Aus den ersten 100 natürlichen Zahlen wird zufällig eine Zahl gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 11 oder durch 5 teilbar?

3.53. Aus den ersten 110 natürlichen Zahlen wird zufällig eine Zahl gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie gerade oder durch 5 teilbar?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie durch 3 oder 9 teilbar?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie durch 3 oder durch 4 teilbar?

3.54. Durch einen Windstoß wird eine Karte eines Skatspiels (32 Karten) vom Tisch auf den Boden gefegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Pikkarte oder um eine Lusche (7, 8, 9, 10)?

3.55. Die Karten eines Skatspiels werden gründlich gemischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die unterste Karte eine 7 oder eine Bildkarte?

3.56. Von den Schülerinnen und Schülern einer Klasse haben 32% Französisch und 15% Spanisch gelernt, 9% beide Fremdsprachen. Eine Person aus der Klasse wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie Französisch oder Spanisch gelernt?

3.57. Für eine Stichprobe werden Haushalte zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass in 75% der Haushalte eine Geschirrspülmaschine vorhanden ist und in 80% ein Mikrowellenherd, in 65% beides. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Haushalt ausgewählt, in dem keines der beiden Geräte vorhanden ist?

Kombinatorik

Die Kombinatorik untersucht die verschiedenen Möglichkeiten, Objekte anzuordnen bzw. auszuwählen.

Beispiel 3.8

Ein Menü besteht aus Vorspeise, Hauptgericht und Nachspeise. Es stehen 2 verschiedene Vorspeisen, 3 Hauptgerichte und 4 Nachspeisen zur Auswahl. Wie viele verschiedene Menüs lassen sich anbieten, die aus Vor-, Haupt-, und Nachspeise bestehen?
Um die Frage zu beantworten, können wir ein Baumdiagramm zeichnen:

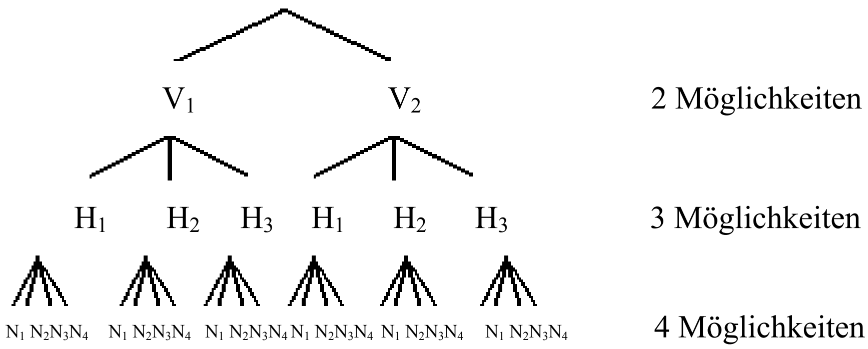


Bild 3.25

Das Baumdiagramm zeigt, dass sich $2 \cdot 3 \cdot 4$ Menüs anbieten lassen.

Produktregel

> Ein Zufallsversuch werde in k Stufen durchgeführt. In der ersten Stufe gebe es n_1, in der zweiten Stufe gebe es n_2, …, in der k – ten Stufe gebe es n_k mögliche Ausfälle. Dann hat der Zufallsversuch insgesamt $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$ mögliche Ergebnisse.

Wichtige Spezialfälle der Produktregel ergeben sich, wenn das mehrstufige Zufallsexperiment in jeder Stufe in gleicher Weise abläuft.

Beispiel 3.9

Eine Urne enthält 5 Kugeln mit den Zahlen 2, 4, 6, 8 und 9. Aus dieser Urne wird dreimal eine Kugel gezogen, die Zahl in der Reihenfolge der Ziehungen notiert und die gezogene Kugel jeweils nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt. In diesem Fall sind die Ergebnisse Tripel wie z. B. (2, 2, 9).

Reihenfolgen beim Ziehen ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal eine Kugel **ohne Zurücklegen** gezogen. Die gezogenen Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann sind $\mathbf{n \cdot (n-1) \; ... \cdot (n-k+1)}$ verschiedene Reihenfolge (k-Tupel) möglich.

Beispiel 3.10

Eine Urne enthält 5 Kugeln mit den Zahlen 2, 4, 6, 8 und 9. Aus dieser Urne wird dreimal eine Kugel gezogen, die Zahl wird in der Reihenfolge der Ziehungen notiert und die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. In diesem Fall sind die Ergebnisse Tripel wie z. B. (2, 4, 9).

Reihenfolge beim Ziehen mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen. Die gezogenen Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann sind $\mathbf{n^k}$ verschiedene Reihenfolgen (k-Tupel) möglich.

Beispiel 3.11

Eine Urne enthält 5 Kugeln mit den Zahlen 2, 4, 6, 8 und 9. Aus dieser Urne wird dreimal hintereinander eine Kugel gezogen, die Zahl wird in der Reihenfolge der Ziehungen notiert und die Kugel wird jedes Mal in die Urne zurückgelegt. In diesem Fall sind die Ergebnisse Tripel wie z. B. (2, 2, 2), (4, 6, 4).

3.58. Anna hat 8 Röcke und 5 Blusen. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?

3.59. Im Wartezimmer eines Arztes stehen 10 Stühle und 6 Patienten haben Platz genommen. Wie viele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es?

3.60. Ein Flugzeug mit 200 Sitzplätzen hat 197 Personen an Bord. Wie viele Möglichkeiten für freie Sitzplätze gibt es?

3.61. Auf wie viele Arten kann man 6 Hotelgäste in 9 freien Einzelzimmern unterbringen?

3.62. Wie viele Telefonnummern mit 7 Ziffern sind möglich, wenn die erste Ziffer eine 0 ist? Wie viele davon enden auf 55?

3.63. Ein Ziffernschloss besteht aus 4 Rädern zu je 10 Ziffern. Wie lange dauert es höchstens das Schloss zu knacken, wenn für jede versuchte Einstellung 4 Sekunden benötigt werden?

3.64. Bei einem Wettlauf treten 5 Mädchen gegeneinander an: Steffi, Melanie, Franziska, Nadine und Sabrina. Wie viele Möglichkeiten existieren, die ersten drei Plätze zu vergeben? Die 5 Kinder sollen nun jeder einen Platz von 1-5 bekommen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

3.65. Aus den Ziffern 1 bis 9 wird zufällig eine vierstellige Zahl gebildet. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn diese Zahl aus vier unterschiedlichen Ziffern bestehen soll?

3.66. Aus den Ziffern 0 bis 9 wird zufällig eine dreistellige Zahl gebildet. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn diese Zahl aus drei unterschiedlichen Ziffern bestehen soll ?

3.67. Auf wie viele Arten können sich 3 Menschen hintereinander aufstellen?

3.68. Aus vier Kärtchen, auf denen die Ziffern von 1 bis 4 stehen und die auch mehrfach verwendet werden dürfen, sollen dreistellige Zahlen gebildet werden (121, 112, 344…). Wie viele verschiedene Zahlen gibt es?

3.69. In der Blindenschrift werden durch die rechteckige Anordnung von sechs Punkten, die entweder erhöht sind oder als Löcher in Papier gedrückt werden, die Buchstaben, Ziffern und Satzzeichen dem Blinden fühlbar gemacht. Punkt oder Nicht-Punkt sind die zwei zu variierenden Elemente. Wie viele verschiedene Zeichen kann man mit dieser Methode codieren.

3.70. Axel verwendet für die folgenden Zufallsversuche ein reguläres Tetraeder. Er beschriftet die vier Seiten des Tetraeders mit den Ziffern 2, 3, 5 und 8 und benutzt es als Würfel. Als geworfen gilt diejenige Zahl, auf die das Tetraeder zu liegen kommt. Axel erstellt nun dreistellige Zufallszahlen, indem er das Tetraeder dreimal wirft und die geworfene Ziffer notiert.

a) Wie viele verschiedene Zahlen kann er so erwürfeln?

b) Wie viele diese Zahlen haben 3 gleiche Ziffern?

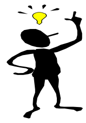
c) Wie viele diese Zahlen haben genau 2 gleiche Ziffern?

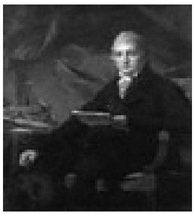
d) Wie viele dieser Zahlen bestehen aus drei verschiedenen Ziffern?

e) Wie viele Zahlen sind durch 5 teilbar?

4. Beschreibende Statistik

Einführung





www.wikipedia.de

*Sir John Sinclair (1754- 1835) war ein schottischer Ökonom und Politiker. In dem 21-Bändigen Werk „Statistical Account of Scotland“ war Sinclair der erste, der den Begriff **Statistik** in seiner heutigen Bedeutung des Sammelns und Auswertens von Daten benutzte.*

Die beschreibende Statistik ist ein Zweig der Wissenschaft, der sich mit der Untersuchung von Massenereignissen beschäftigt. Sie fasst alle Methoden zusammen, die eine Menge von beobachteten **Daten** summarisch darstellen, ordnen, untersuchen und einige Schlußfolgerungen ziehen läßt.Von diesen Methoden wird gefordert, dass sie objektiv (unabhängig vom Standpunkt des Statistikerstellers),verlässlich (bei der Wiederholung eines Experimentes unter gleichen Rahmenbedingungen erzielt man das gleiche Messergebnis), reproduzierbar und relevant sind.

In der Statistik bezeichnet man als **Grundgesamtheit** (auch Population) die Menge aller potentiellen Untersuchungsobjekte für eine bestimmte Fragestellung.
Die Elemente der Grundgesamtheit haben verschiedene Eigenschaften, die die Statistik **Merkmale** nennt. Ein Merkmal, das verschiedene Ausprägungen wie: zB.Geschlecht, Augenfarbe usw. hat, nennt man **qualitativ.** Das Merkmal, dessen Ausprägungen Zahlen oder Größen sind, nennt man **quantitativ.**

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die beschreibende Statistik - ....

die Daten - ....

die Grundgesamtheit - ....

das qualitative Merkmal - ....

das quantitative Merkmal - ....

Es ist oft nicht möglich die ganze Grundgesamtheit zu untersuchen. Man muss sich in der Regel auf eine **Stichprobe** (Teilmenge einer Grundgesamtheit) beschränken. Eine Stichprobe soll die Verhältnisse in der Grundgesamtheit gut widerspiegeln. Sie soll repräsentativ sein. Darunter versteht man, dass jedes zufällig ausgewählte Element der Grundgesamtheit die gleiche Chance gehabt haben muss, in die Stichprobe zu gelangen. Die Anzahl der Elemente einer Stichprobe nennt man **Stichprobenumfang**.
Durch die statistische **Erhebung,** d.h Befragung, Beobachtungen, Messen der Stichprobe (z.B. mit Hilfe von Fragebögen) bzgl.eines Merkmales bekommt man eine Sammlung von **Daten** (Beobachtungswerte)**.** Eine ungeordnete Zusammenstellung von Daten nennt man **Urliste.** Nach der Erhebung von Daten muss **die Auswertung** erfolgen. Dazu sind alle Methoden der Aufbereitung der Daten und die weiter beschriebenen, gebräuchlichen Größen anwendbar.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Stichprobe - ....

der Stichprobenumfang - ....

die Urliste -..

die Umfrage - ....

die statistische Erhebung - ....

die Auswertung - ....

4.1. Welche der folgenden Merkmale sind quantitativ, welche qualitativ?

Haarfarbe, Beruf, Anzahl der Personen in einem Haushalt, Körpergewicht, Schultypen, Anzahl der Kinder in einer Familie, Seitenzahl von Büchern, Anzahl der Kontobuchungen pro Woche, Anzahl der Verkehrstoten pro Monat, Einkommen, Körperlänge von Neugeborenen, Höchstgeschwindigkeit von Kraftfahrzeugen, Schüler in einer Klasse, Vermögen.

4.2. Ergänze die Tabelle. Schreibe die entsprechenden Merkmale oder die Grundgesamtheiten auf.

Merkmal	Grundgesamtheit
Stimmabgabe für Partei CDU	
Kinderzahl	
	alle Autos dieses Typs
	Neugeborene in Deutschland
	Kühe einer Rasse
Berufswunsch	
Privates Geldvermögen	

Klassifizierung von Daten

Zuerst werden die Einzeldaten der Umfrage in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt und dann in einem Diagramm veranschaulicht.

Beispiel 1.

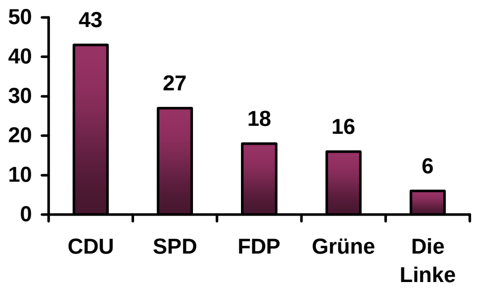
In den Landtagswahlen in Hessen am 18.01.2009 haben folgende Parteien die angegebene Anzahl von Mandaten bekommen:

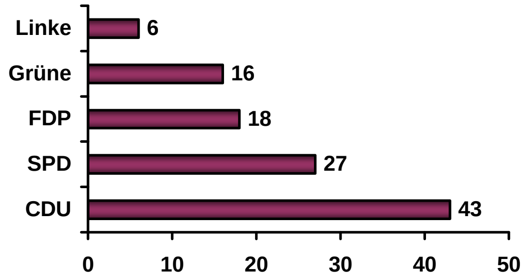
CDU 43 SPD 27 FDP 18 Grüne 16 Die Linke 6

Fertige eine Tabelle an und zeichne ein **Säulendiagramm** und ein **Balkendiagramm**.

Lösung:

Partei	**CDU**	**SPD**	**FDP**	**Grüne**	**Linke**
Zahl der Mandate	43	27	18	16	6



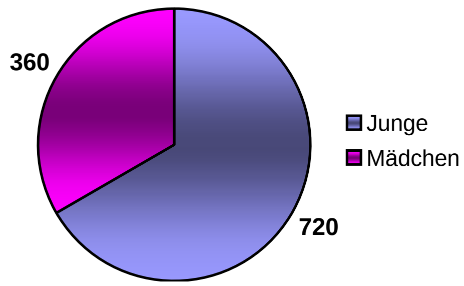


Beispiel 2.

In einer Stadt X hat man das Geschlecht von Neugeborenen beobachtet. Unter 1080 Neugeborenen sind 720 Jungen. Der Rest sind Mädchen. Fertige eine Tabelle an und zeichne ein **Kreisdiagramm**:

Lösung:

Geschlecht	Jungen	Mädchen
Anzahl	720	360



4.3. Lies folgenden Text:

> „Immer mehr Deutsche leben allein.1992 gab es laut Statistischen Bundesamt zwölf Millionen Single-Haushalte, 1,6 Prozent mehr als in 1991. In 33,7 Prozent aller Haushalte leben Einzelpersonen.“

a) Wie viele Single-Haushalte gab es in 1991?

b) Wie viele Haushalte waren es insgesamt in 1992?

c) Stelle die Informationen aus dem Text in Form eines Diagramms dar.

4.4. Gegeben ist ein **gruppiertes Säulendiagramm**, das die Daten der Umfrage „Wie hoch ist Ihre monatliche Mobiltelefon-Rechnung im Durchschnitt?“ darstellt. Man hat 2500 Frauen und 2500 Männer befragt.

(Quelle: http://deutschessprachdiplom.blogspot.com/)

Beantworte folgende Fragen:

a) Wie viele Frauen und wie viele Männer haben keine Summe genannt?

b) Wie viele Frauen bezahlen monatlich nicht mehr als 40 Euro?

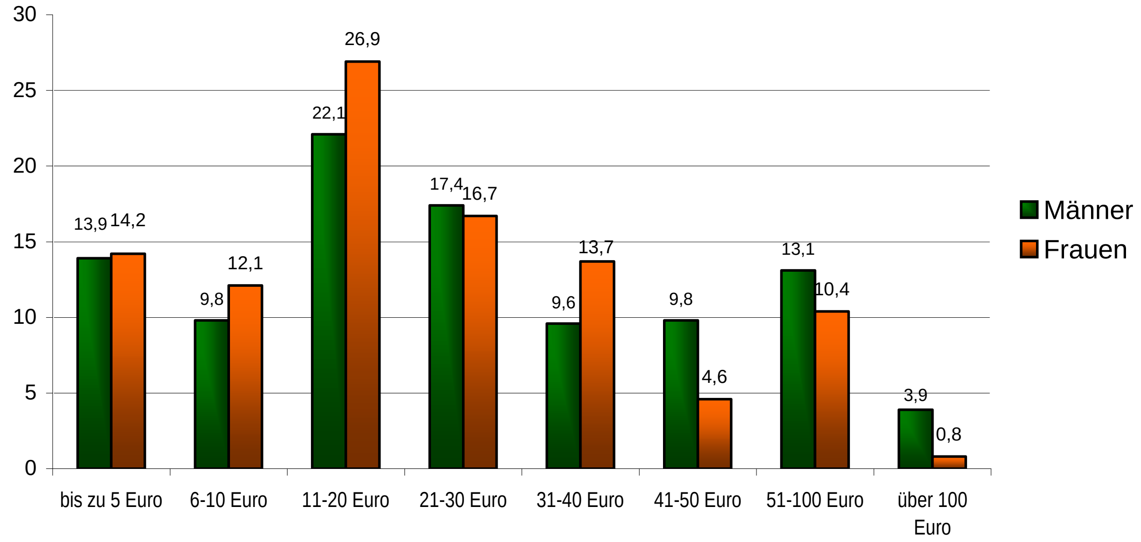
c) Wie viele Männer bezahlen mehr als 50 Euro?

d) Wie viele Frauen bezahlen „11-20 Euro“ oder „6-10 Euro“ ?

e) Welche Rechnungssumme ist von den Männern am häufigsten bezahlt?

f) Bei welcher Rechnungssumme ist die Tendenz „Mehr Männer“bemerkbar ?

Angaben in Prozent
(Rest: »Weiß nicht«)



Man hat über Handybenutzer einen Artikel geschrieben. Lies folgenden Text und bearbeite die Informationen und Aufgaben.

Die Zeiten, als Handys ein wichtiges Statussymbol waren, sind offensichtlich vorbei: Fast allen Befragten (97 Prozent) ist es nicht so wichtig, immer das neueste Modell zu besitzen. Und obwohl rund die Hälfte aller Handybesitzer betont, dass es für sie sehr wichtig ist, immer erreichbar zu sein, schaltet die Mehrheit ihr Mobiltelefon nachts und zu bestimmten Anlässen aus. Nur noch 37 Prozent aller Handys sind permanent auf Empfang geschaltet. Dabei sind es vor allem die Jüngeren, bei denen ein abgeschaltetes Handy ein mulmiges Gefühl erzeugt.

„Ein Leben ohne Handy ist für mich nicht mehr vorstellbar.“Diese Aussage lehnten über 70 Prozent der Handybesitzer ab. Nur 28 Prozent geben zu, ihren Alltag ohne Handy gar nicht mehr bewältigen zu können. Dieses Ergebnis ist vielleicht nicht überraschend, denn niemand gibt gerne zu, dass er von etwas abhängig ist.

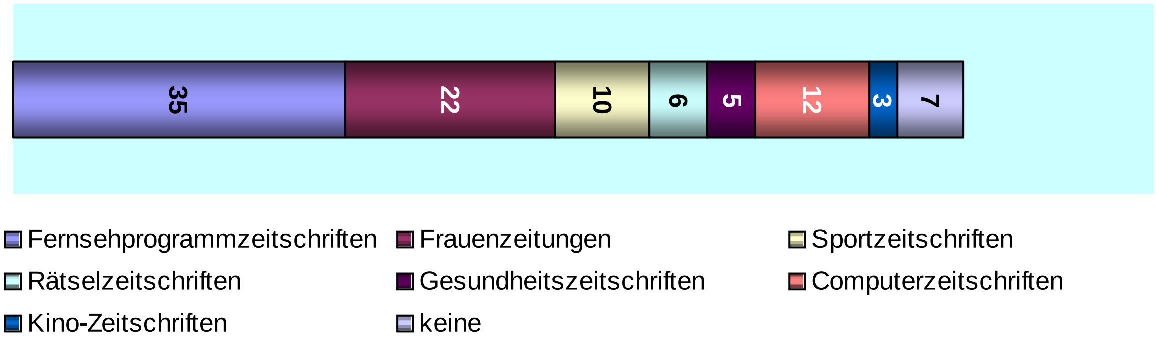
Dabei sind die handylosen Zeiten gar nicht so lange her. Man erinnere sich: Für Anrufe in Abwesenheit gab es Anrufbeantworter und zu Verabredungen kam man besser pünktlich, wenn man nicht riskieren wollte, nie wieder angerufen zu werden.

(Quelle: Kölner Stadt-Anzeiger, 12.03.2005)

g) Arbeite die wichtigsten Aussagen aus dem Textausschnitt und der Grafik heraus.

h) Versuche einen Fragebogen zu diesem Thema zu schreiben und untersuche damit deine Klasse. Bei der Konstruktion eines Fragebogens benutze verschiedene Typen von Fragen: *Fragen mit Einfachauswahl, Fragen mit Mehrfachauswahl, Skalenfragen, Fragen mit freier Antwort.* Mache die Auswertung der Umfrage in Form von Tabellen und Diagrammen. Welche der angegebenen Fragen lassen sich am leichtesten auswerten?

4.5. In einem **Streifendiagramm** werden die Daten (Angaben in Prozent) der Umfrage „Von welchen Zeitschriften haben Sie in den letzten 3 Monaten eines oder mehrere Exemplare gelesen?“ dargestellt. Man hat 2000 Personen im Alter von 20 bis 50 Jahren befragt.



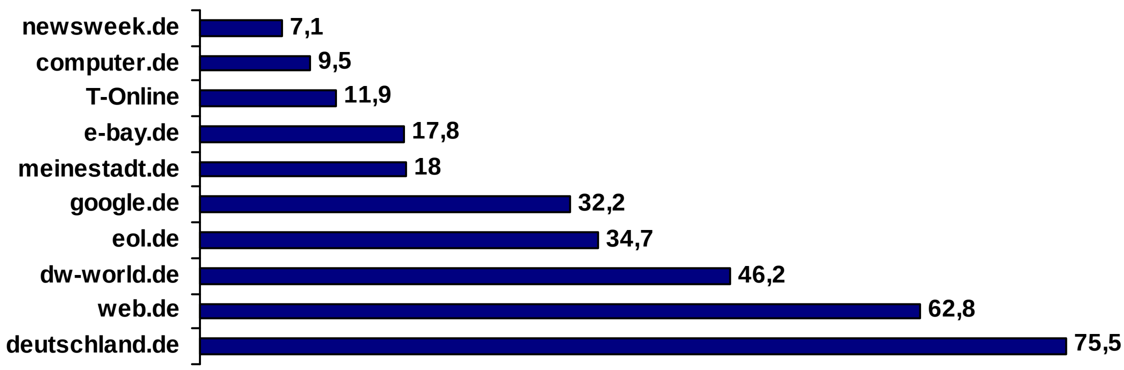
a) Nenne diejenigen Zeitschriften, die am häufigsten gelesen worden sind.

b) Wie viele Befragte lesen Sport- oder Computerzeitschriften?

c) Wie viele Personen lesen keine Zeitschriften?

d) Wie viele Personen lesen Gesundheitszeitschriften oder Rätselzeitschriften?

4.6. Eine Computerzeitschrift hat die Daten einer Umfrage bzgl. der deutschen Massenmedien veröffentlicht. Es wurden zehn, populäre Internetportale erwähnt. (Angaben in Prozent)



Das Internet benutzen 23,9% der Deutschen im Alter zwischen 15 und 70 Jahren, davon jeder dritte täglich. Die Umfrage hat man von März bis Mai in einem Jahr durchgeführt. Man hat 2100 Personen befragt.

a) Beurteile, wie viele Personen täglich das Internetportal „google.de“ benutzten

b) Nenne diejenigen Internetportale, die durch mindestens $\frac{1}{4}$ aller Personen benutzt wurden.

4.7. In der Tabelle hat man die Daten über die weltweit benutzten Sprachen dargestellt. Die Zahlen geben den Teil der Weltbevölkerung in Mill. an, die die Sprache als Muttersprache benutzt.

Sprache	Chinesisch	Englisch	Spanisch	Hindi	Arabisch	Französisch	Russisch	Portugisisch	Bengalisch	Japanisch	Deutsch
Zahl (Mill)	873	508	438	497	206	78	145	178	171	122	95

Im Jahr 2005 lebten auf der Welt 6,77 Mrd. Menschen. Bestimme :

a) den Anteil der Leute, die als Muttersprache jeweils Englisch, Deutsch oder Spanisch benutzen

b) den Anteil der Leute, die als Muttersprache Chinesisch oder Japanisch benutzen

c) den Anteil der Leute, die als Muttersprache Spanisch oder Portugiesisch benutzen

(Die Lösung wird zu 0,01 gerundet)

4.8. Eine Umfrage in einer Stadt X hat ergeben:

Berufliche Stellung des Haushaltsvorstands	*Anzahl der Familien*
Landwirt	**81**
Selbstständiger	**186**
Beamter	**125**
Angestellter	**372**
Arbeiter	**644**
Nichterwerbstätiger	**712**

a) Bestimme die Gesamtzahl der in der Umfrage erfassten Familien.

b) Bestimme den Anteil der Familien, bei denen der Haushaltsvorstand jeweils Angestellter ist.

c) Bestimme den Anteil der Familien, bei denen der Haushaltsvorstand jeweils Selbstständiger oder Beamter ist.

Absolute und relative Häufigkeiten

Bei statistischen Untersuchungen ist die Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Merkmal in einer Stichprobe vorkommt, die erste Zahl, die direkt zu der Auswertung der Umfrage führt. Der Begriff „**absolute Häufigkeit**“ ist gleichbedeutend mit dem Begriff Anzahl. Diese Zahl gibt an, wie oft das Merkmal innerhalb einer Stichprobe auftritt.

Die **relative Häufigkeit** eines Merkmales ist gleich dem Quotienten aus dessen absoluter Häufigkeit und dem Umfang der Stichprobe. Sie läßt die statistischen Untersuchungen unterschiedlichen Umfangs vergleichen und gibt den (prozentualen) Anteil der Elemente mit dem gleichen interessierenden Merkmal aus der erfaßten Stichprobe an. Die relative Häufigkeit ist eine Zahl aus dem Intervall <0,1>, die am häufigsten im Prozent dargestellt wird. Die Summe aller Häufigkeiten in einer statistischen Erhebung ist 1.

Wird beobachteten Werten einer statistischen Untersuchung ihre jeweilige relative Häufigkeit zugeordnet, so spricht man von einer **Häufigkeitsverteilung.**

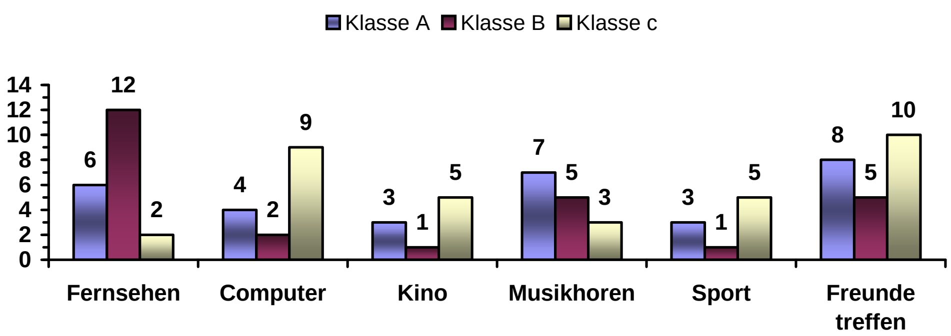
Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die absolute Häufigkeit - ....

die relative Häufigkeit - ....

die Häufigkeitsverteilung - ....

4.9. An einem Gymnasium wurden die Schüler der ersten Klassen nach ihrer beliebtesten Freizeitbeschäftigung befragt. Die Daten sind im Diagramm dargestellt.



a) Lies ab, wie groß die Klassen sind?

b) Wie viel Prozent der Schüler in Klasse A sieht gern fern?

c) Wie viel Prozent der Schüler in Klasse B trifft Freunde am liebsten?

d) Wie viel Prozent der Schüler in Klasse C spielt Computer oder treibt am liebsten Sport?

e) Lies ab, wie häufig die einzelnen Hobbys genannt wurden.Ergänze folgende Tabelle:

Hobby	**Fernsehen**	**Computer**	**Kino**	**Musikhören**	**Sport**	**Freunde treffen**
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

4.10. Berechne die relativen Häufigkeiten der Merkmalen in den Aufgaben 4.7, 4.8 und stelle sie als Tabellen und als Säulendiagrammen dar.

4.11. In der Tempo-50-Zone wurde an einem Tag die Geschwindigkeit aller Autos gemessen

Die Geschwindigkeit km/h	**bis 45**	**über 45 bis 50**	**über 50 bis 55**	**über 55 bis 60**	**über 60 bis 65**	**über 65**
Anzahl	82	280	25	17 15		6

a) Mit welchen relativen Häufigkeiten traten die einzelnen Geschwindigkeitsbereiche auf?

b) Wie viel Prozent der Autofahrer hielten sich an die Geschwindigkeitbegrenzung?

c) Wie viel Prozent der Autofahrer fuhr schneller als 60 km/h?

4.12. Die Anteile der Automarken Audi, Opel, Ford, Fiat, Skoda und BMW in einer Stadt verhalten sich wie 7:5:3:4:5 (bei der angegebenen Reihenfolge).
Gib die relative Häufigkeit jeder Automarke? an. Stelle sie in einer Tabelle dar.

4.13. Beim gleichzeitigen Werfen von 3 Münzen wurde notiert, bei wie vielen Münzen jeweils Wappen oben lag. Es ergab sich die folgende Urliste bei einer Stichprobe vom Umfang 34:1,2,2,2,1,2,2,1,1,1,1,3,2,0,0,3,0,2,1,2,1,3,2,0,0,2,2,1,1,3,1,2,3,2.

a) Welche Merkmalswerte sind möglich?

b) Berechne die absoluten Häufigkeiten für die verschiedenen Merkmalswerte.

c) Berechne die relativen Häufigkeiten für die verschiedenen Merkmalswerte.

d) Wie groß ist die Häufigkeit, dass bei mindestens zwei Münzen Wappen oben liegt?

Statistische Kenngrößen

Das **arithmetische Mittel** $\overline{x}$ der Beobachtungsergebnisse $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ einer Stichprobe vom Umfang n ist folgendermaßen definiert:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Das **gewichtete arithmetische Mittel** $\overline{x}$ wird dann berechnet, wenn die Merkmalswerte $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ einer Stichprobe die jeweiligen „Gewichtungsfaktoren" $w_1, w_2, w_3, ..., w_n$ haben.

$$\overline{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + ... + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n}$$.,wobei $w_1, w_2, w_3, ..., w_n \in R^+$

und $w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$ ist gleich dem Umfang der Stichprobe.

Der **Median** (oder *Zentralwert*) m_e der nach der Größe geordneten Werte $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ einer Stichprobe vom Umfang n ist:

$$m_e = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \textit{Wenn n ungerade} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \textit{Wenn n gerade} \end{cases}$$

Ein Wert m_e ist Median einer Stichprobe, wenn höchstens die Hälfte der Beobachtungen in der Stichprobe einen Wert $< m_e$ und höchstens die Hälfte einen Wert $> m_e$ hat.

Der **Modus** (oder *Modalwert*) ist der Wert, der am häufigsten unter den Beobachtungsergebnissen einer Stichprobe auftritt.

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

das arithmetische Mittel - ....

das gewichtete Mittel - ....

der Median=der Zentralwert - ....

der Modus=der Modalwert - ....

Beispiel 3.

Die Einkommen einer Gruppe von 10 Personen verteilen sich wie folgt:

- 9 Personen verdienen jeweils 1.000 € und
- 1 Person verdient 1.000.000 €.

Das Durchschnittseinkommen beträgt 100.900 €, der Median jedoch nur 1.000 €.
In diesem Beispiel wird gezeigt, dass das arithmetische Mittel ein Wert ist, der nicht unter den beobachtetenWerten vorkommen muss, und nicht immer die Mitte einer Häufigkeitsverteilung kennzeichnet. Er wird sehr stark von so gennanten „**Ausreißern**“ (extreme Werte) beeinflusst. Der Median wird von Ausreißern nicht wesentlich beeinflusst. Handelt es sich um eine annähernd symmetrische Häufigkeitsverteilung, so liegen das arithmetische Mittel und der Median nahe beieinander.

4.14. Bei einer statistischen Erhebung hat man ein Lehrbuch auf einer Skala von 1 bis 50 bewertet. Man hat folgende Daten gesammelt:

a) 13, 27, 44, 38, 17, 30, 38, 14, 21, 48, 5

b) 15, 22, 7, 40, 9, 31, 25, 26, 48, 17, 20, 33

Berechne für beide Beispiele den Median.

4.15. Die Anzahl der Beschäftigten in den Betrieben einer Stadt Y beträgt: 3,4,4,6,8,12,14,14,19,23,104. Kennzeichnet das arithmetische Mittel oder der Median diese Merkmalswerte besser? Gib eine Begründung an.

4.16. Analysiere folgende Tabelle:

Lebenserwartung in Europa	Männer(in Jahren)	Frauen (in Jahren)
Polen	69,7	78,0
Schweden	77,4	82,0
Schweiz	76,9	82,6
Ungarn	67,1	75,6
Luxemburg	74,7	81,2
Österreich	75,1	81,0
Rumänien	67,0	74,2
Tschechische Republik	71,7	78,4
Vereinigtes Königreich	75,0	79,8
Deutschland	76,6	82,1

a) Welche Thesen würdest du anhand dieses Materials formulieren?

b) Wo lebt man statistisch am längsten und welche Gründe gibt es dafür?

c) Berechne das arithmetische Mittel für die angegebenen Daten für Männer und für Frauen?

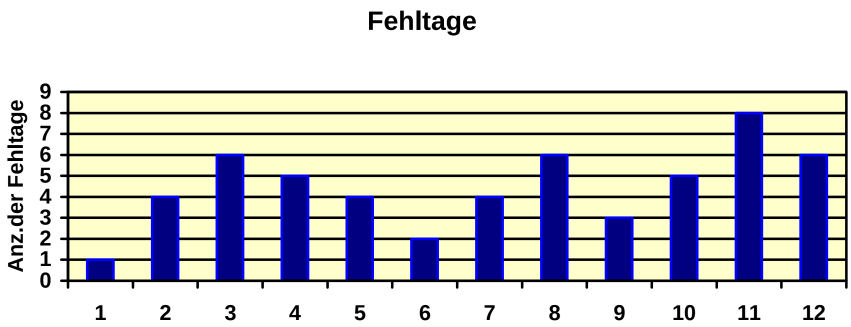
d) Wie groß ist die Lebenserwartung insgesamt in den erwähnten Ländern?

4.17. Folgendes Säulendiagramm beschreibt die Fehltage von 12 Schülern einer Klasse während eines Halbjahres.

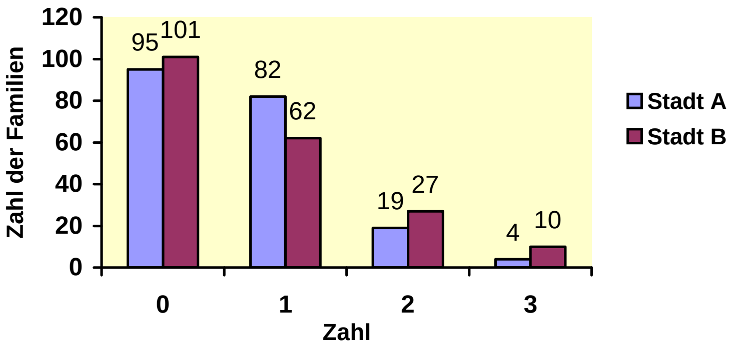
a) Erstelle eine Häufigkeitstabelle.

b) Bestimme Modus und Median der Verteilung

c) Berechne die durchschnittliche Zahl der Fehltage.



4.18. In zwei Städten hat man eine statistische Erhebung bzgl. der Zahl von Autos pro Familie durchgeführt. Man hat die gesammelten Daten im Säulendiagramm dargestellt.



a) Wie viele Familien hat man in beiden Städten befragt?

b) Vergleiche die Zahl der Familien „ohne Auto“ in beiden Städten. Wieviel Prozent aller Familien in der Stadt A(B) ist „ohne Auto“?

c) Berechne die durchschnittliche Zahl der Autos pro Familie in der Stadt A und dann in der Stadt B.

d) Vergleiche die durchschnittliche Zahl der Autos in der Stadt A mit der durchschnittlichen Zahl der Autos in der Stadt B prozentual?

4.19. Ein Lehrer hat seinen Schülern sein Notensystem dargestellt: schriftliche Klausur - Gewichtung 40, mündliche Mitarbeit - Gewichtung 20, schriftliche Hausaufgaben - Gewichtung 10. Peter hat bis heute in der ersten Klausur eine 3 und in der zweiten Klausur eine 4 bekommen. Zwei mal hat er mündlich Fragen beantwortet und die Noten 5 und 4 erhalten. Seine Hausaufgabe hat der Lehrer mit 3 bewertet. Welche Note muss Peter in der letzten Klausur erreichen, um eine 4 zum Semesterabschluss zu haben? Der Lehrer rechnet das gewichtete Mittel, um die Abschlussnote zu bekommen.

4.20. Berechne das gewichtete Mittel der Zahlen: 2, 3, 4, 5, 6 mit entsprechenden Gewichtungsfaktoren :

a) 10 10 10 10 10

b) 10 20 20 200 500

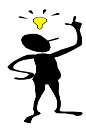
c) 100 100 50 50 50.

4.21. Fünf Schüler A, B, C, D und E wohnen in einer geraden Straße, und zwar A 30m, B 70m, C 560m, D 680m und E 120m vom Anfang der Straße entfernt.

a) Berechne den Mittelwert und den Median der Entfernungen vom Straßenanfang.

b) Bestimme die Summe der Entfernungen, die die Schüler zurücklegen müssen, wenn sie sich an dem durch Mittelwert bzw. Median festgelegten Ort treffen wollen. Welcher Treffpunkt ist günstiger?

Varianz und Standardabweichung



Um ein Maß dafür zu haben, wie stark die Werte $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ einer Urliste von ihrem arithmetischen Mittel $\overline{x}$ abweichen, wurde **die Varianz** (die mittlere quadratische Abweichung) $\overline{\sigma}^2$ eingeführt:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}.$$

Beispiel 4.

Zwei Schülergruppen führen einen Vergleichskampf im Hochsprung durch.

Gruppe 1: 133, 128, 142, 145, 137 cm, $\overline{x} = 137$ cm

Gruppe 2: 140, 137, 135, 139, 139 cm. $\overline{x} = 138$ cm

Die Mittelwerte von beiden Stichproben unterscheiden sich nicht wesentlich.

(Welche ist die deiner Meinung nach ausgeglichenere Gruppe? Begründe!)

Für die Gruppe 1:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{(133-137)^2 + (128-137)^2 + (142-137)^2 + (145-137)^2 + (137-137)^2}{5} = 37{,}2cm^2$$

Für die Gruppe 2:

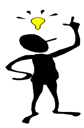
$$\overline{\sigma}^2 = \frac{(140-138)^2 + (137-138)^2 + (135-138)^2 + (139-138)^2 + (139-138)^2}{5} = 3{,}2cm^2$$

Die Varianz der Gruppe 1 ist größer als der Gruppe 2. Die Werte der ersten Urliste „**streuen**“ stärker als die der zweiten. Die Varianz kann als Streuungsmaß gewählt werden.

Die quadratischen Abweichungen sind stets positiv oder 0 und haben die Einheit cm^2.

Durch das Quadrieren der Abweichungen wird die Maßeinheit des betrachteten Merkmals verändert. Um dieselbe Einheit wie bei den Stichprobenwerten zu erhalten, definiert man als weiteres Streuungsmaß für die Abweichung der Werte $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ vom Mittelwert die Quadratwurzel aus der Varianz und bezeichnet diese als **Standardabweichung.**

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + ... + (x_n-\overline{x})^2}{n}}.$$



Beispiel 5.

Bei einer statistischen Erhebung hat man die Anzahl der durch die Autofahrer wahrgenommenen Verkehrszeichen längs einer bestimmten Straßenstrecke erfasst. 25 Autofahrer wurden befragt. Man hat folgende Ergebnisse bekommen:

Anzahl der Verkehrszeichen	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Autofahrer	1	3	5	9	6	1

Der Mittelwert: $\overline{x} = \frac{1}{25}(1\cdot 3 + 3\cdot 4 + 5\cdot 5 + 9\cdot 6 + 6\cdot 7 + 1\cdot 8) = 5{,}76$

Die Varianz:

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{(3-5{,}76)^2\cdot 1 + (4-5{,}76)^2\cdot 3 + (5-5{,}76)^2\cdot 5 + (6-5{,}76)^2\cdot 9 + (7-5{,}76)^2\cdot 6 + (8-5{,}76)^2\cdot 1}{25}$$

$$\overline{\sigma}^2 = 1{,}38$$

Die Standardabweichung: $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2} = \sqrt{1{,}38} = 1{,}17$

Was bedeuten die folgenden Fachbegriffe auf Polnisch?

die Abweichung - ....

die mittlere quadratische Abweichung - ....

streuen - ....

die Streuung - ....

die Varianz - ....

die Standardabweichung - ....

4.22. Bei den Jugendspielen im Weitsprung erzielte Anjas Mannschaft folgende Ergebnisse (in cm): 373, 362, 329, 345, 333, 357, 349, 340, 371, 364 , in Olivers Mannschaft waren die Ergebnisse 392, 384, 423, 408, 397, 446, 417, 402. Berechne jeweils den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung.

4.23. Bei 100 Würfen mit einem Spielwürfel fiel 10mal die Augenzahl 1, 20mal die Augenzahl 2, 17mal die „3“, 21mal die „4“, und 14mal die „5“.Wie oft fiel die „6“? Berechne Mittelwert, Varianz und Standardabweichung der gefallenen Augenzahlen.

4.24. Die Daten des in den Krankenhäusern eines Landkreises in den letzten 8 Jahren beschäftigten Pflegepersonals sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Jahr	2001	2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008						
Personal	2413	2428 2350 2370 2337 2402 2345 2373						

Stelle die Daten in einem Säulendiagramm dar. Wähle einen geeigneten Maßstab. Wie viel Personal wurde durchschnittlich in den Jahren von 2001 bis 2008 beschäftigt? Berechne den Median und die Standardabweichung.

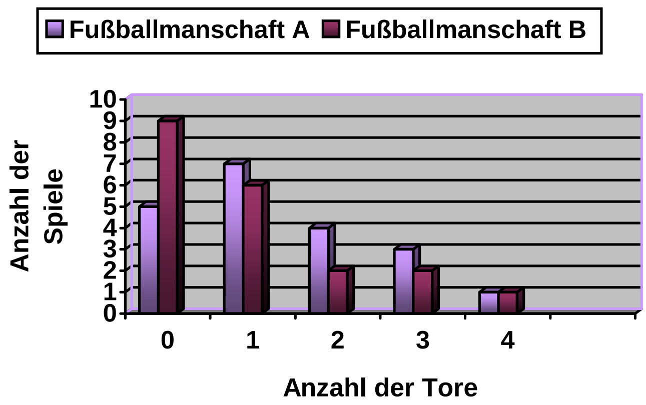
4.25. Zur Abfüllung von Lebensmitteln werden einer Firma zwei Maschinen X und Y angeboten. Ein Probelauf, bei dem X und Y auf einen Sollwert von 500g eingestellt waren, erbrachte folgendes Ergebnis:

Gewicht in g	495	497	499	500	501	503	505	507
Stückzahl bei Maschine X	10	60	190	500	160	40	50	30
Stückzahl bei Maschine Y	10	70	130	540	160	60	20	10

Berechne die Standardabweichung.Welche der beiden Maschinen hält den Sollwert genauer ein?

4.26. Bestimme von den größten Seen Deutschlands den Mittelwert und die Standardabweichung der Flächeninhalte (in km^2) und der Tiefe (in m):
Bodensee – 536/254;Müritz – 117/31; Chiemsee – 80/72,7; Schweriner See– 61,54/52,4; Starnberger See – 56/127,7.

4.27. Bei einer statistischen Erhebung hat man zwei Fußballmanschaften A und B untersucht. Man hat die Anzahl der geschossenen Tore in 20 Spielen betrachtet. Die Daten sind in dem Diagramm dargestellt.



Bestimme den Mittelwert und die Standardabweichung der Zahl der Tore für jede Manschaft. Charakterisiere die beiden mit Hilfe der berechneten Maße.

4.28. Bei Erbsenpflanzen hat man die Anzahl der Samenkörner in den Schoten untersucht:

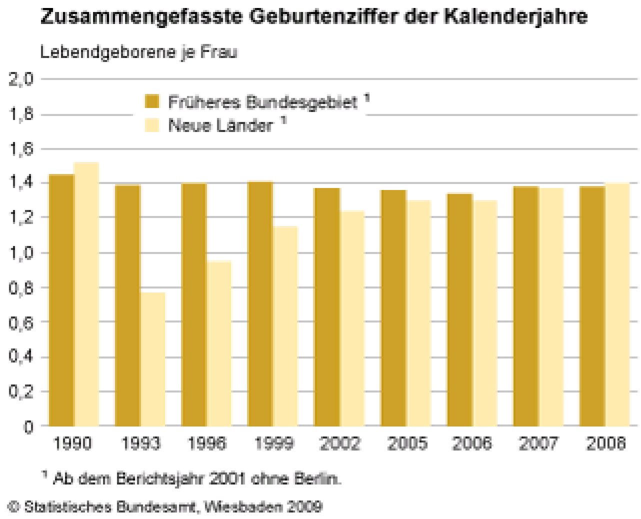
Anzahl Samen	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Schoten	8	14	20	44	38	22	2

Berechne die mittlere Anzahl der Samen pro Schote, die Varianz und die Standardabweichung.

Aufgaben für DSD II

Übung 1 Geburtenentwicklung

„Die Ergebnisse der laufenden Geburtenstatistik für das Kalenderjahr 2008 zeigen für Deutschland einen minimalen Anstieg der Geburtenziffer von 1,37 auf 1,38 Kinder je Frau. Dafür ist vorrangig die Zunahme der Geburtenhäufigkeit in den neuen Ländern (ohne Berlin) verantwortlich, wo die Geburtenziffer zum ersten Mal nach 1990 das Niveau von 1,40 Kindern je Frau erreicht hat. In den alten Ländern (ohne Berlin) blieb die Geburtenziffer konstant bei 1,37 Kindern je Frau.“ (http://www.destatis.de)



„......Die ehemalige DDR wirkte dem Geburtenrückgang ab Mitte der 70er Jahre mit umfangreichen staatlichen Fördermaßnahmen für Familien mit Kindern entgegen. Diese Politik führte sogar zu einem kurzfristigen Anstieg der zusammengefassten Geburtenziffer im Jahr 1980 auf 1,94 Kinder je Frau. Dann ging auch hier die Geburtenhäufigkeit allmählich wieder zurück. In Folge der wirtschaftlichen und sozialen Umbrüche, die in den neuen Ländern mit der deutschen Wiedervereinigung einhergingen, brach hier die Zahl der Geburten und mit ihr die zusammengefasste Geburtenziffer stark ein: Von 1990 bis 1994 sank die zusammengefasste Geburtenziffer von 1,52 auf 0,77. Seit 1995 nimmt die damit gemessene Geburtenhäufigkeit der Frauen in den neuen Ländern wieder zu. Im Jahr 2007 war sie mit 1,37 Kindern je Frau genauso hoch und im Jahr 2008 mit 1,40 Kindern je Frau bereits höher als in den alten Ländern.“ (http://www.destatis.de)

„In den beiden Jahren 2007 und 2008 haben vor allem Frauen im Alter zwischen 30 und 40 Jahren durchschnittlich mehr Kinder bekommen als die gleichaltrigen Frauen in den Jahren davor. In den jüngeren Jahrgängen nahm die Geburtenhäufigkeit weiter ab.
Ob mit der Zunahme der Geburtenhäufigkeit in den Jahren 2007 und 2008 eine nachhaltige

Veränderung des Geburtenverhaltens eingesetzt hat, indem sich mehr Frauen für die Mutterschaft entscheiden, kann erst nach einigen Jahren beurteilt werden.“ (http://www.destatis.de)

Aufgabe:

1. Arbeiten Sie die wichtigsten Aussagen aus dem Textausschnitt und der Grafik heraus.

2. Kinderreiche Familien: Was spricht Ihrer Meinung nach dafür oder dagegen?

3. Was halten Sie davon, dass sich mehr Frauen für die Mutterschaft entscheiden. Begründen Sie Ihre Meinung.

Wortmaterial und Hilfsfragen:

a) Schreibe eine Einleitung von 1-2 Sätzen zu dem Thema, das in der Aufgabenstellung genannt ist. Vergleiche in der Einleitung die Veränderung zu 30 Jahren früher.

b) Stelle die 3 - 4 Hauptgesichtspunkte mit eigenen Worten dar.

c) Nenne den Titel der Grafik, die Quelle und die Param eter (z.B. Zeitraum, Maßeinheit, gesellschaftliche Gruppen). Beantworte folgende Fragen: Werden Entwicklungen dargestellt? Gibt es Extrem werte? Gibt es Gemeinsamkeiten zwischen den ein zelnen Positionen?

d) Fasse die Hauptinformationen der Grafik noc h einmal zusammen. Benutze die T eilsätze als Hilfe:

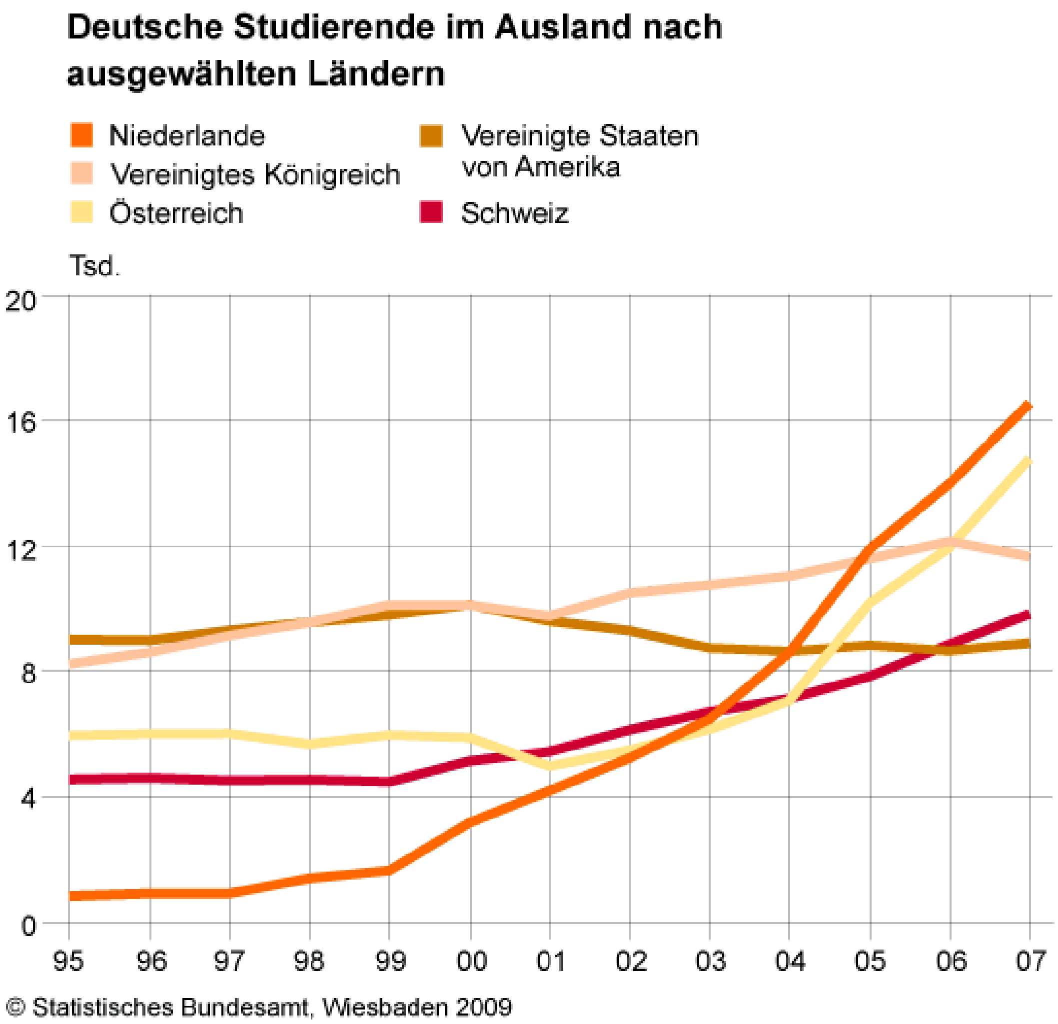
- Wenn man die Daten der Grafik betrachtet,........
- Die Grafik zeigt also, dass......,
- Schon die Grafik deutet darauf hin, dass...,
- Aus der Grafik geht hervor....
- Aus der Grafik kann man die Entwicklung ....ablesen,
- Das Säulendiagrammmm beschreibt/ verdeutlicht....
- Beim Blick auf die Grafik wird deutlich........

e) Mache dir noch einm al klar, was das The ma des Textes und was das Them a der Grafik war. Von diesen Them en ausgehend musst du nun eine Überleitung zum Argumentationsteil finden (Lies noch einmal die Aufgabenstellung!).

- **Die Statistik bestätigt....**
- **Wie schon im Text zu lesen ist,........**
- **Ein weiterer Aspekt wird im Text beleuchtet.............**
- **Zusätzlich erfahren wir aus dem Text, dass..............**

Übung 2 Deutsche Studierende im Ausland

„Etwa 90 300 deutsche Studierende waren im Jahr 2007 an ausländischen Hochschulen eingeschrieben, 7% oder 5700 Studierende mehr als im Vorjahr. Dies ist u.a. auf einen starken Anstieg der Zahl der deutschen Studierenden in den Niederlanden, Österreich und der Schweiz zurückzuführen.



Die Bereitschaft der Studierenden zu Studienaufenthalten im Ausland ist in den letzten zehn Jahren kontinuierlich gestiegen. Während 1997 auf 1000 deutsche Studierende an inländischen Hochschulen noch 27 deutsche Studierende an Hochschulen im Ausland kamen, waren es 2007 bereits 53. Die drei beliebtesten Zielländer aller deutschen Studierenden im Ausland waren 2007 die Niederlande mit 18,3%, Österreich mit 16,4% und das Vereinigte

Königreich mit 12,9%, gefolgt von der Schweiz (10,9%), den Vereinigten Staaten (9,9%) und Frankreich (7,5%). Diese sechs Länder zusammen nahmen drei Viertel der im Ausland studierenden Deutschen auf.
Die Verteilung der deutschen Studierenden im Ausland nach Fächergruppen unterscheidet sich in den Zielländern erheblich. Zum Beispiel sind in den Niederlanden 47% und im Vereinigten Königreich 46% aller deutschen Studierenden in der Fächergruppe „Rechts-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften“ eingeschrieben, während in Frankreich rund 45% aller deutschen Studierenden in der Fächergruppe "Sprach- und Kulturwissenschaften, Sport" studieren. Ungarn bildet insofern einen Sonderfall, als dort 72% der deutschen Studierenden in "Humanmedizin" immatrikuliert sind.“ (http://www.destatis.de)

Aufgabe:

1. Arbeiten Sie die wichtigsten Aussagen aus dem Textausschnitt und der Grafik heraus.
2. Welche Vor- und Nachteile hat das Studium im Ausland?
3. Welche Fächer eignen sich besonders für das Studium im Ausland? Begründen Sie Ihre Meinung.

Fasse die Informationen aus der Grafik und dem Text zusammen.

Benutze folgende Begriffe:

Redemittel zu Tendenzen	Anteile und Positionen
sich positiv entwickeln	An erster Stelle steht..
sich erhöhen	Danach folgt.....
nach oben schießen	Im Mittelfeld liegen.....
hinaufklettern	Das Schlusslicht bilden.....
sich kaum verändern	Um X Plätze besser stehen
absinken	X Plätze hinter..... liegen....
geringer werden	
zurückgehen	

Abiturbogen A

Aufgabe 1 A

Gegeben ist die Menge $\boldsymbol{U}=\{x : x \in \boldsymbol{N} \wedge \ 1 \leq x \leq 17\}$. Die Mengen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$

sind Teilmengen der Menge $\boldsymbol{U}$ und durch folgende Angaben festgelegt:

$\boldsymbol{A}$ = { alle Vielfachen der Zahl 6}

$\boldsymbol{B}$ = { alle Teiler der Zahl 24 }

$\boldsymbol{C}$ = { alle Kubikzahlen der natürlichen Zahlen }.

a) Geben Sie die Menge A in aufzählender Form an.

b) Geben Sie die Durchschnittsmenge der Mengen A und B in aufzählender Form an.

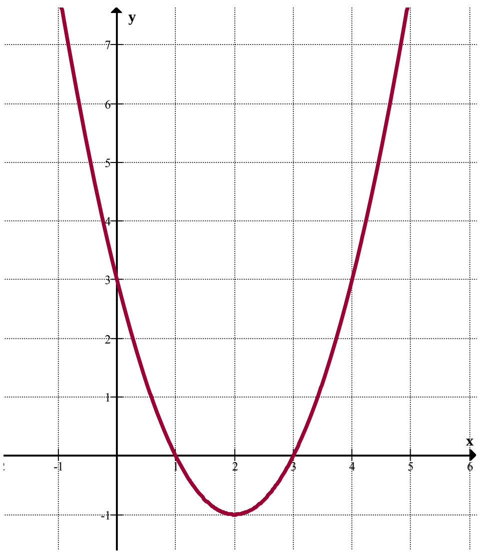
c) Geben Sie die Vereinigungsmenge der Mengen A und C in aufzählender Form an.

d) Geben Sie die Differenzmenge A und C in aufzählender Form an.

e) Geben Sie die Schnittmenge der Mengen A und C in aufzählender Form an.

Aufgabe 2 A

Von einer quadratischen Funktion f ist der unten abgebildete Ausschnitt des Graphen gegeben:



Bestimmen Sie anhand dieses Graphen:

a) die Definitionsmenge der Funktion f,

b) die Wertemenge der Funktion f,

c) die Nullstellen der Funktion f,

d) das maximale Intervall, in dem die Funktion f monoton steigt,

e) das maximale Intervall, in dem die Funktion f monoton fällt,

f) das Intervall, in dem die Funktion negative Werte annimmt,

g) die zu diesem Graphen gehörige Funktionsgleichung.

Aufgabe 3 A

Eine Raute hat einen Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$. In dieser Raute ist die eine Diagonale um 6 cm kürzer als die andere.

a) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen.

b) Berechnen Sie die Länge der Seite.

Aufgabe 4 A

Zeichnen Sie in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a ein zweites Dreieck durch Verbinden der Seitenmittelpunkte. Zeichnen Sie ein drittes Dreieck durch Verbinden der Seitenmittelpunkte des zweiten Dreiecks usw.

a) Wie groß ist die Summe der Umfänge der ersten 4 Dreiecke?

b) Wie groß ist die Summe der Umfänge aller Dreiecke?

c) Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der ersten 4 Dreiecke?

d) Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke?

Aufgabe 5 A

In einem Koordinatensystem sind die Punkte: $A=(-2,-3)$, $B=(1,\ 1)$ und $C=(-3,\ 4)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks *ABC*.

b) Überprüfen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig oder rechtwinklig ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

d) Berechnen Sie den Umkreisradius des Dreiecks *ABC*.

e) Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks *ABC*.

f) Geben Sie die Gleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ an.

g) Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden *AE*.

Aufgabe 6 A

Eine Gerade schneidet einen Kreis mit dem Radius 10 cm so, dass die Sehne vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand $5\sqrt{2}$ cm hat.

a) Berechnen Sie die Länge der Sehne.

b) Berechnen Sie den Umfang des entstandenen Kreisabschnittes.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des entstandenen Kreisabschnittes.

Geben Sie die Ergebnisse als genaue Werte an.

Aufgabe 7 A

Eine Dreieckspyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck.

Die Mantelfläche der Pyramide beträgt $36\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ und die Seitenhöhe ist $4\sqrt{6}$ cm lang.

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen dieser Pyramide.
Geben Sie die Ergebnisse als genaue Werte an und runden Sie auf 2 Stellen nach dem Komma.

b) Wie groß ist der Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche?

Aufgabe 8 A

Wählen Sie das Wort (***A***, ***B***, ***C***, ***D***), das in die Lücke $\square$ passt.
Es gibt nur eine richtige Lösung.

a) In jedem Dreieck schneiden sich die drei $\square$ in einem Punkt, dieser ist der Mittelpunkt des Umkreises.

A - Seitenhalbierenden

B - Höhen

C - Mittelsenkrechten

D – Winkelhalbierenden

b) Die Diagonalen $\square$ schneiden sich rechtwinklig.

A - im Rechteck

B - im Dreieck

C - im Parallelogramm

D - in der Raute

c) Die $\square$ zweier Mengen *A* und *B* besteht aus allen Elementen, die zur Menge *A* oder zur Menge *B* oder zu beiden Mengen gehören.

A - Differenzmenge

B - Durchschnittsmenge

C - Schnittmenge

D - Vereinigungsmenge

Abiturbogen B

Aufgabe 1 B

Die Mengen A, B und C sind durch die folgenden Angaben festgelegt:

$\boldsymbol{A}$ ist die Menge aller Primzahlen, die kleiner als 12 sind.

$\boldsymbol{B}$ ist die Menge aller zusammengesetzten Zahlen, die kleiner als 12 sind.

$\boldsymbol{C}$ ist die Menge aller ungeraden Zahlen, die kleiner als 12 sind.

a) Geben Sie die Mengen A, B und C in aufzählender Form an.

b) Geben Sie die Durchschnittsmenge der Mengen A und C in der aufzählenden Form an.

c) Geben Sie die Vereinigungsmenge der Mengen A und C in der aufzählenden Form an.

d) Geben Sie die Differenzmenge der Mengen B und C in der aufzählenden Form an.

Aufgabe 2 B

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke stehen im Verhältnis $25:9$ zueinander und ihre Umfänge unterscheiden sich um 8 cm. Berechne die Umfänge der beiden Dreiecke.

Aufgabe 3 B

Für das Bohren eines Brunnens berechnet eine Brunnenbaufirma 20 € für den ersten Meter. Jeder weitere Meter kostet 5 % mehr als der vorhergehende.

a) Wie teuer wird der letzte Meter für eine Bohrtiefe von 10 m?

b) Wie hoch werden die Kosten für eine Bohrtiefe von 10 m?

Geben Sie das Ergebnis als Potenz und als genauen Wert an.

Aufgabe 4 B

In einem Koordinatensystem sind die Punkte: $A=(0,-1)$, $B=\left(3\sqrt{3},-4\right)$ und $C=\left(3\sqrt{3},\ 2\right)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie den Umkreisradius des Dreiecks ABC.

d) Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks ABC.

e) Geben Sie die Anzahl der Symmetrieachsen des Dreiecks ABC an und bestimmen Sie die zugehörigen Gleichungen.

f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks ABC.

Aufgabe 5 B

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten.

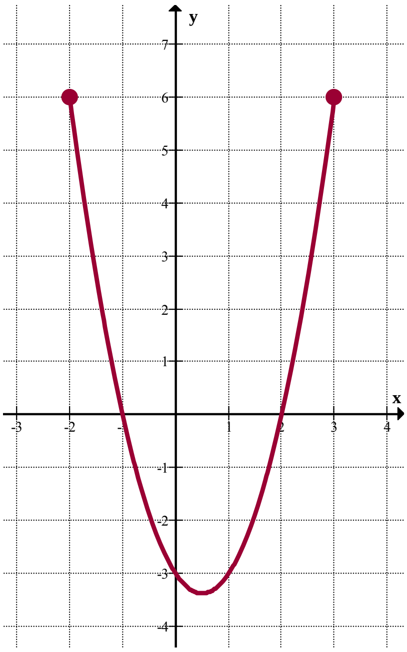
a) ***A***- Die Summe der Augenzahlen ist größer als 10.

b) ***B***- Das Produkt der Augenzahlen ist kleiner als 6.

c) ***C***- Die Augenzahl 3 tritt in mindestens einem Wurf auf.

Aufgabe 6 B

Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion.



Bestimmen Sie anhand dieses Graphen:

a) den Definitionsbereich der Funktion *f*,

b) die Nullstellen der Funktion *f*,

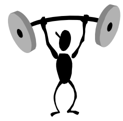
c) die Gleichung der Parabel,

d) die Wertemenge der Funktion *f*,

e) das maximale Intervall, in dem die Funktion *f* monoton steigt,

f) das maximale Intervall, in dem die Funktion *f* monoton fällt,

g) die Gleichung der Symmetrieachse dieser Parabel.



Aufgabe 7 B

Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide ist eine Raute. Die Diagonalen dieser Raute sind 8 cm und 6 cm lang. Der Diagonalenschnittpunkt der Raute ist gleichzeitig der Höhenfußpunkt der Pyramide. Die längere Seitenkante ist 6 cm lang.

a) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Geben Sie das Ergebnis als genauen Wert und auf 2 Dezimalen gerundet an.

b) Wie groß ist der Winkel zwischen der längeren Seitenkante und der Grundfläche?

Aufgabe 8 B

Wählen Sie das Wort (***A***, ***B***, ***C***, ***D***), das in die Lücke $\square$ passt.
Es gibt nur eine richtige Lösung.

a) In jedem Dreieck schneiden sich die drei $\square$ in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks, und teilen sich dabei gegenseitig im Verhältnis 2:1.

A - Seitenhalbierenden
B - Höhen
C - Mittelsenkrechten
D - Winkelhalbierenden

b) Die Diagonalen $\square$ sind gleichzeitig die Winkelhalbierenden.

A - im Rechteck
B - im Dreieck
C - im Parallelogramm
D - in der Raute

c) Die $\square$ zweier Mengen A und B besteht aus allen Elementen, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören.

A - Differenzmenge
B - Teilmenge
C - Schnittmenge
D - Vereinigungsmenge

Abiturbogen C

Aufgabe 1 C

Gegeben ist die Menge $\boldsymbol{U}=\{x : x \in N \wedge 1 \leq x \leq 100\}$. Die Mengen A, B und C sind Teilmengen der Menge U und sind durch die folgenden Angaben festgelegt:

A ist die Menge aller Zahlen, die durch 4 teilbar sind.

B ist die Menge aller Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

a) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Mengen A und B an.

b) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Durchschnittsmenge von A und B an.

c) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Vereinigungsmenge von A und B an.

Aufgabe 2 C

Für das Bohren eines Brunnens berechnet eine Brunnenbaufirma 100 € für den ersten Meter. Für jeden weiteren angebrochenen Meter werden 5 € mehr berechnet als für den vorhergehenden.

a) Wie teuer wird der letzte Meter für eine Bohrtiefe von 9,2 m?

b) Wie hoch werden die Kosten für eine Bohrtiefe von 9,2 m?

Aufgabe 3 C

In einem Koordinatensystem sind die Punkte: $A=(0,-1)$, $B=\left(3\sqrt{2},\ 1\right)$ und $C=\left(3\sqrt{2},-3\right)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie den Umkreisradius des Dreiecks ABC.

d) Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks ABC.

e) Geben Sie die Anzahl der Symmetrieachsen des Dreiecks ABC an und bestimmen Sie ihre Gleichungen.

f) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks ABC.

Aufgabe 4 C

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 2{,}5x + 1{,}5$ und $g(x) = 0{,}5x^2 - x + 6$.

Die Schnittpunkte des Graphen der Funktion *f* mit der Abszissenachse bilden mit einem beliebigen Punkt *P* des Graphen *g* ein Dreieck.

Für welchen Punkt $P \quad (P \in g)$ wird die Dreieckfläche minimal?

Aufgabe 5 C

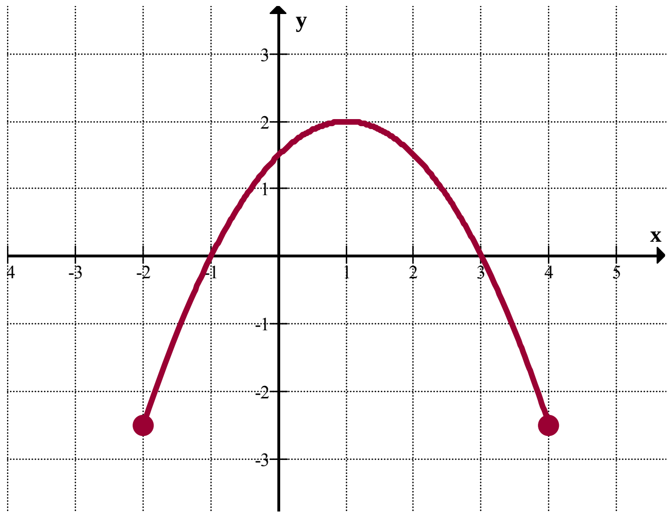
Eine Urne enthält 6 rote, 3 schwarze und 1 grüne Kugel. Man zieht daraus drei Kugeln ohne Zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

a) ***A***- Es werden drei verschiedenfarbige Kugeln gezogen.

b) ***B***- Es werden drei gleichfarbige Kugeln gezogen.

Aufgabe 6 C

Von einer quadratischen Funktion ist der unten abgebildete Graph gegeben.



Bestimmen Sie anhand dieses Graphen:

a) den Definitionsbereich der Funktion *f*,

b) die Nullstellen der Funktion *f*,

c) die Gleichung der Parabel, deren Graph gegeben ist,

d) die Wertemenge der Funktion *f*,

e) das maximale Intervall, in dem die Funktion *f* monoton steigt,

f) das maximale Intervall, in dem die Funktion *f* monoton fällt,

g) die Gleichung der Symmetrieachse dieser Parabel.

Aufgabe 7 C

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck. Die Katheten sind die 4 cm und 3 cm, die Seitenkanten 5 cm lang.

a) Berechnen Sie die Höhe dieser Pyramide.

b) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

c) Berechnen Sie den Mantelflächeninhalt dieser Pyramide.

Geben Sie die Ergebnisse als genaue Werte an.

Aufgabe 8 C

Wählen Sie das Wort (***A***, ***B***, ***C***, ***D***), das in die Lücke $\square$ passt.

Es gibt nur eine richtige Lösung.

a) In jedem Dreieck schneiden sich die drei $\square$ in einem Punkt, dieser ist der Mittelpunkt des Inkreises.

A - Seitenhalbierenden

B - Höhen

C - Mittelsenkrechten

D - Winkelhalbierenden

b) Eine Zahl a ist $\square$ einer Funktion, wenn a zur Definitionsmenge gehört und wenn für $f(a)=0$ gilt.

A - Nullpunkt

B - Nullstelle

C - Schnittpunkt mit der x-Achse

D - Schnittpunkt mit der y-Achse

c) Die Geraden mit den Gleichungen: $y=2x+3$ und $y=\frac{1}{2}x+3$ $\square$.

A - sind zueinander parallel

B - sind zueinander senkrecht

C - schneiden sich im Punkt $P=(3,0)$

D - schneiden sich im Punkt $Q=(0,3)$

Abituraufgaben

GESCHLOSSENE AUFGABEN

6.1. Das Quadrat der Summe der Zahlen $2\sqrt{3}$ und 5 ist gleich:
A) 17, B) $37 + 20\sqrt{3}$, C) $4 - \sqrt{3}$, D) $25 - 4\sqrt{3}$.

6.2. Wenn eine natürliche Zahl k größer als null ist, dann ist $m = (k\sqrt{2} - 1)(k\sqrt{2} + 1) + 1$:
A) eine Primzahl, B) eine gerade Zahl,
C) eine ungerade Zahl, D) eine zusammengesetzte Zahl.

6.3. Wenn $x - y = 5$ und $x + y = -4$, dann ist $x^2 - y^2$ gleich:
A) 1, B) 9, C) 9, D) -20.

6.4. Die Hälfte der Zahl 2^{182} ist gleich:
A) 1^{182}, B) 2^{91}, C) 2^{181}, D) 1^{91}.

6.5. Wenn $\log_2 a = 4$ und $\log_4 b = 2$, dann ist die Wurzel des Produktes der Zahlen a und b gleich:
A) 8, B) 16, C) 32, D) 4.

6.6. Gegeben sind die Zahlen 0,(35); 0,3(35); 0,3(5); 0,3(535). Die größte Zahl ist:
A) 0,(35), B) 0,3(35), C) 0,3(5), D) 0,3(535).

6.7. Für $x \in (-2, 0)$ ist der Term $-|x - 3| + |x + 2| + 2|x|$ gleich:
A) 1,5, B) -1, C) 2, D) 1.

6.8. Für das Polynom $W(x) = x^2 + x - 2$ ist wahr:
A) $W(-2) + 1 < 0$, B) $W(1) \cdot W(-2) > 0$,
C) $W(-2) + 1 = 0$, D) $W(1) \cdot W(-2) = 0$.

6.9. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 - 4x = 0$?
A) 0, B) 1, C) 2, D) 3.

6.10. Die lineare Funktion $f(x) = (m + 2)x + m$ ist monoton steigend für:
A) $m > -2$, B) $m < 0$, C) $m < -2$, D) $m < 2$.

6.11. Zum Graphen der Funktion $f(x) = (1 + \sqrt{3})x$ gehört der Punkt:
A) $(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 9)$, B) $(1 - \sqrt{3}, -2)$,
C) $(0, \sqrt{3})$, D) $(1, \sqrt{3})$.

6.12. Die Zahlen $4, x, 25$ sind Glieder einer geometrischen Folge. Der Quotient der Folge ist gleich:
A) $-2{,}5$ oder 2,5, B) -4 oder 4, C) $-0{,}4$ oder 0,4 D) $-6{,}25$ oder 6,25.

6.13. Die Glieder der Folge $a_n = 5 - 3n$ sind:
A) monoton fallend, B) monoton steigend,
C) konstant, D) nicht monoton.

6.14. Ein Kreis hat den Radius $2\sqrt{3}$ und ist einem gleichseitigen Dreieck umbeschrieben. Die Höhe des Dreiecks ist dann gleich:

A) $3\sqrt{3}$, B) 3, C) $\frac{81}{4}$, D) $\frac{9}{2}$.

6.15. Eine Zahl ist um 20% größer als das Quadrat einer anderen positiven Zahl a. Ihr Term lautet:

A) $1{,}02a^2$, B) $a^2 + 0{,}2a$, C) $1{,}2a^2$, D) $a^2 + 0{,}2$.

6.16. Die Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ hat die Koordinaten:

A) (4, 2), B) (– 2, – 4), C) (2, 4), D) (– 2, 4).

6.17. Die Punkte $K = (0, 7)$ und $L = (6, -1)$ sind Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks KLM. Das Umfang des Dreiecks ist gleich:

A) $5\sqrt{2}$, B) 30, C) $10\sqrt{2}$, D) $10\sqrt{3}$.

6.18. Wenn $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$, dann ist $\cos\alpha$ gleich:

A) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, B) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{46}}{7}$, C) $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{3}}$, D) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{7}$

6.19. Die Kantenlängen zweier Würfel stehen im Verhältnis 4:3 . Wie verhalten sich die Volumina der Würfel?

A) 64 : 27, B) 3 : 4, C) 16 : 9, D) 1 : 3.

6.20. Ein Becher enthält 10 Kugeln, die mit den Zahlen 10 bis 19 beschriftet sind. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel miteiner Primzahl gezogen wird?

A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{3}{10}$, C) $\frac{2}{5}$, D) $\frac{3}{5}$.

OFFENE AUFGABEN

6.21. Eine 2-stellige Zahl wird um 9 größer, wenn man ihre Ziffern vertauscht. Ihre Zehnerziffer ist halb so groß wie ihre Einerziffer. Bestimme die Zahl.

6.22. Gegeben ist die Funktion $y = -\frac{2}{5}x + 2$. Ermittle

a) die Nullstelle der Funktion, **b)** den Schnittpunkt mit der y-Achse.

6.23. Zeige, dass die Zahl $|x-2| - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ für $x < 0$ negativ ist.

6.24. Eine Parabel mit einer Gleichung der Form $f(x) = x^2 + bx + c$ verläuft durch A = (– 3, 0) und B = (0, – 3). Ermittle die Nullstellen der dazugehörigen Funktion und die Scheitelpunktskoordinaten der Funktion.

6.25. Eine 10 cm lange Strecke soll so in 3 Teile geteilt werden, dass der mittlere Teil doppelt so lang ist wie der kürzeste, und der längste um 1 cm länger ist als der mittlere. Wie lang werden die drei Teile?

6.26. Zeige, dass das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (1, –4)$, $B = (8, –3)$ und $C = (2, –1)$ rechtwinklig ist.

6.27. Ein Parallelogramm ($a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60°$) soll in ein flächengleiches Rechteck mit derselben Seite a verwandelt werden. Wie lang ist die Seite b?

6.28. Ermittle die Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke AB, wenn $A = (–2, 4)$ und $B = (2, 6)$.

6.29. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $4 < 2x(x + 1)$.

6.30. Von einer arithmetischen Folge ist die Summe aus dem 5. und 11. Glied 58, die Summe aus dem 6. und 14. Glied 80. Berechne a_1. Gib das Bildungsgesetz der Folge an.

6.31. Gegeben ist die Folge $a_n = – 2n^2 + 8n + 10$. Welche Glieder der Folge sind nicht negativ?

6.32. Ermittle a so, dass die Zahl 3 die Nullstelle des Polynoms $W(x) = x^3 – 6x^2 + ax – 6$ ist.

6.33. Ein Becher enthält 20 nummerierte Kugeln. Eine davon wird gezogen.

Nummer der Kugel	1	2	7	9
Anzahl der Kugeln	10	5	4	1

a) Berechne mit Hilfe der Angaben in der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis eine Zahl über 1 ist.

Lösung

GESCHLOSSENE AUFGABEN

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10
B	B	D	C	B	C	B	D	C	A

6.11	6.12	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	6.18	6.19	6.20
B	A	A	A	C	C	B	B	A	C

OFFENE AUFGABEN

6.21. 12 **6.22.** **a)** $x_0 = 5$ **b)** $(0, 2)$ **6.23.** $|x-2| - 2\sqrt{x^2-4x+4} = x-2 < 0$

6.24. $b = 2$, $c = -3$, $x_0 \in \{-3, 1\}$, $p = -1$, $q = -4$ **6.25.** 1,8 cm, 3,6 cm, 4,6 cm

6.26. $|AB| = \sqrt{50}$, $|AC| = \sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{40}$, $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ **6.27.** $2\sqrt{3}$

6.28. $y = -2x + 5$ **6.29.** $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

6.30. $a_1 = -9\frac{1}{2}$ $a_n = -15 + 5\frac{1}{2}n$ **6.31.** $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **6.32.** $a = 11$

6.33. **a)** $P(1) = \frac{10}{20}$, $P(2) = \frac{5}{20}$, $P(7) = \frac{4}{20}$, $P(9) = \frac{1}{20}$, **b)** $P(A) = \frac{1}{2}$

1. Exponentialfunktion und Logarithmen

1.1 a) $f(x)=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$, c – Anfangsmasse ,x – Anzahl Tage b) 8,3%

1.2 25

1.3 a) 3200 b) $f(x)=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{1600}}$, c – Anfangsmasse ,x – Anzahl Jahre

1.4 ca. 5200 Jahre

1.5 ca. 40

1.6 108, 3862

1.7 a) $f(x)=1000\cdot 1{,}5^{x}$ b) 11390

1.8 um 12,9%

1.9 0,33

1.10 50, 13,88, ca.68%

1.11 nach 5,7 Jahren

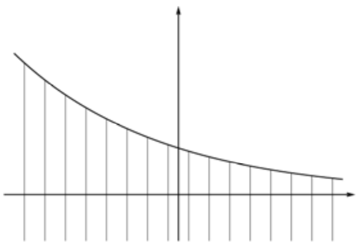
1.12 $f(x)=10000\cdot(0{,}85)^{x}$, 6141

1.14. $f(x)=2^{\frac{x}{3}}$

1.15 a) a=3 b) a=0,5 c) $a=\sqrt{6}$ d) a=256

1.16 a) a = 2 c = 0,5 b) a = $\frac{7}{5}$ c = 7 c) a = 1,2 c = 2,41

1.19



Bespiel 4

b) 4 c) 32 d) 3 e) 1 f) $\frac{3}{2}$ g) – 0,5 h) 0 i) $\frac{5}{8}$

1.21 a) 3 b) 4 c) –1 d) $\frac{3}{2}$ e) 2 f) 1 g) -$\frac{3}{2}$

1.22 a) log3 b) logx c) 5logx d)-logx e) 0 f) 0 g) 7logx

1.23 a) 3(1-a) b) $\frac{a+b}{2}$ c) $\frac{a-b}{3}$

1.24 9

1.26 a) –2 b) 2,5 c) 2 d) $\frac{3}{8}$

1.27 a) 125 b) 4 c) 5 d) 81 f) 2

2. Stereometrie

2.1.

Grundfläche des Prismas	Anzahl der			**F + E**	**K + 2**
	Ecken **E**	Kanten **K**	Flächen **F**		
Dreieck	**6**	**9**	**5**	**11**	**11**
Viereck	**8**	**12**	**6**	**14**	**14**
Fünfeck	**10**	**15**	**7**	**17**	**17**
Sechseck	**12**	**18**	**8**	**20**	**20**

$\boldsymbol{E + F = K + 2}$

2.2. **a)** 4-mal größer, **b)** 9-mal größer, **c)** x^2-mal größer

2.3. **a)** 2-mal größer, **b)** 3-mal größer, **c)** 2-mal größer,

d) 3-mal größer, **e)** x^3-mal größer

2.4. **a)** $d = 2\sqrt{17}$ cm, **b)** $A_M = 96\ \text{cm}^2$, **c)** $A_O = 128\ \text{cm}^2$, **d)** $V = 96\ \text{cm}^3$

2.5. $\text{tg}\alpha = 1{,}5$

2.6. **b)** $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, **c)** $A_O = 12\left(4\sqrt{2}+3\right)\ \text{cm}^2,\ V = 72\ \text{cm}^3$

2.7. **a)** $V_Q = 36\ \text{cm}^3$, **b)** $R = 3{,}5$ cm, $V_K = \dfrac{343}{6}\pi\ \text{cm}^3 \approx 179{,}59\ \text{cm}^3$, **c)** $\dfrac{V_K}{V_Q} = \dfrac{343}{216}\pi \approx 5$

2.8. $\alpha = 45^\circ$

2.9. **a)** $A_G = 30\ \text{cm}^2$, **b)** $A_M = 300\ \text{cm}^2$, **c)** $A_O = 360\ \text{cm}^2$, **d)** $V = 300\ \text{cm}^3$

2.10. **a)** $A_G = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **b)** $A_M = 120\ \text{cm}^2$, **c)** $A_O = 8\left(\sqrt{3}+15\right)\ \text{cm}^2$, **d)** $V = 40\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

2.11. **a)** $A_M = 72\ \text{cm}^2$, **b)** $A_O = 12\left(\sqrt{3}+6\right)\ \text{cm}^2$, **c)** $V = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

2.12. $A_M = 35\sqrt{5}\ \text{cm}^2, A_O = \left(35\sqrt{5}+36\right)\ \text{cm}^2$

2.13. $a = 6$ cm, $\left(a^2 + 17a - 138 = 0\right)$

2.14. $A_O = 36\left(\sqrt{2}+1\right)\ \text{cm}^2,\ V = 36\sqrt{2}\ \text{cm}^3,\ \left(H = 3\sqrt{2}\ \text{cm}\right)$

2.15. $A_O = 72\left(\sqrt{2}+1\right)\ \text{cm}^2,\ V = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^3,\ \left(a = 6\sqrt{2}\ \text{cm},\ H = 3\sqrt{2}\ \text{cm}\right)$

2.16. $A_O = 36\left(\sqrt{7}+1\right)\ \text{cm}^2,\ V = \dfrac{128}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^3,\ \left(a = 4\sqrt{2}\ \text{cm}, H = 4\sqrt{3}\ \text{cm}\right)$

2.17. a) $A_M = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, **b)** $A_M = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^2$, **c)** $A_M = 288\ \text{cm}^2$

2.18. $A_O = 96\ \text{cm}^2,\ V = 48\ \text{cm}^3$

2.19. $A_O = 144\ \text{cm}^2,\ V = 64\ \text{cm}^3$

2.20. $A_O = 24\left(\sqrt{46}+3\right)\ \text{cm}^2,\ V = 192\ \text{cm}^3$

2.21. $A_O = 9\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2,\ V = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

2.22. $A_O = 3\left(2\sqrt{15}+3\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2,\ V = 18\ \text{cm}^3$

2.23. $A_O = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2,\ V = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^3,\ \left(a = 2\sqrt{6}\ \text{cm}, h_S = 3\sqrt{2}\ \text{cm}\right)$

2.24. $A_O = 24\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2,\ V = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^3,\ \left(h_S = 2\sqrt{7}\ \text{cm}\right)$

2.25. $A_O = 16\left(\sqrt{3}+15\right)\ \text{cm}^2,\ V = \dfrac{64\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3,\ \left(H = 4\ \text{cm}\right)$

2.26. $A_O = 12\left(2\sqrt{3}+\sqrt{21}\right)\ \text{cm}^2,\ V = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3,\ \left(a = 4\ \text{cm},\ h_S = \sqrt{21}\ \text{cm}\right)$

2.27. $A = 2\pi\ \text{m}^2 \approx 6{,}2\ \text{m}^2$

2.28. $A = 4{,}8\pi\ \text{m}^2 \approx 15\ \text{m}^2$

2.29. a) 2-mal größer, **b)** 3-mal kleiner, **c)** 4-mal größer, **d)** 9-mal kleiner, **e)** 4-mal kleiner

2.30. a) 2-mal größer, **b)** 2-mal kleiner, **c)** 4-mal größer, **d)** 4-mal kleiner, **e)** 8-mal größer, **f)** 27-mal größer, **g)** 27-mal kleiner, **h)** x^3-mal größer

2.31. a) $V_1 = \dfrac{150}{\pi}\ \text{cm}^3 \approx 47{,}75\ \text{cm}^3,\ \left(H = 6\ \text{cm}, r = \dfrac{5}{\pi}\right),$

$V_2 = \dfrac{90}{\pi}\ \text{cm}^3 \approx 28{,}65\ \text{cm}^3,\ \left(H = 10\ \text{cm}, r = \dfrac{3}{\pi}\right)$ **b)** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}$

2.32. a) $V_1 = \dfrac{ab^2}{2\pi},\ \left(H = a, r = \dfrac{b}{2\pi}\right),\ V_2 = \dfrac{a^2b}{2\pi},\ \left(H = b, r = \dfrac{a}{2\pi}\right)$ **b)** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{b}{a}$

2.33. $H = 6\ \text{cm},\ A_O = 54\ \text{cm}^2,\ V = 54\ \text{cm}^3$

2.34. $r = 6\ \text{cm},\ A_O = 108\ \text{cm}^2,\ V = 108\ \text{cm}^3$

2.35. $V = 288\pi\ \text{cm}^3$

2.36. $V = 384\pi\ \text{cm}^3$

2.37. $A_{M_1}=24\pi\ \text{cm}^2, A_{O_1}=56\pi\ \text{cm}^2, V_1=48\pi\ \text{cm}^3, (r=4\ \text{cm},\ h=3\ \text{cm}),$

$A_{M_2}=24\pi\ \text{cm}^2, A_{O_2}=42\pi\ \text{cm}^2, V_2=36\pi\ \text{cm}^3, (r=3\ \text{cm},\ h=4\ \text{cm}),$

$$A_{M_1}=A_{M_2},\quad \frac{A_{O_1}}{A_{O_2}}=\frac{4}{3},\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{3}$$

2.38. $A_{M_1}=2ab\pi,\ A_{O_1}=2a(a+b)\pi,\ V_1=a^2b\pi,\ (r=a,\ \ h=b),$

$A_{M_2}=2ab\pi,\ A_{O_2}=2b(a+b)\pi,\ V_2=ab^2\pi,\ (r=b,\ \ h=a),$

$$A_{M_1}=A_{M_2},\quad \frac{A_{O_1}}{A_{O_2}}=\frac{a}{b},\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{a}{b}$$

2.39. **a)** $V=48\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$, **b)** $A_M=96\pi\ \text{cm}^2$, **c)** $A_O=96\left(\sqrt{3}+1\right)\pi\ \text{cm}^2$

2.40. **a)** $V=256\pi\ \text{cm}^3,\ (r=4\ \text{cm},\ h=16\ \text{cm})$, **b)** $A_M=128\pi\ \text{cm}^2$, **c)** $A_O=160\pi\ \text{cm}^2$

2.41. **a)** $\frac{r}{l}=1$, **b)** $\frac{r}{l}=\frac{1}{2}$, **c)** $\frac{r}{l}=\frac{1}{x}$

2.42. **a)** $r=7\ \text{cm},\ l=14\ \text{cm},\ h=7\sqrt{3}\ \text{cm}$ **b)** $r=5\ \text{cm},\ l=10\ \text{cm},\ h=5\sqrt{3}\ \text{cm}$

2.43. $r=4\sqrt{2}\ \text{cm},\ l=8\sqrt{2}\ \text{cm},\ h=4\sqrt{6}\ \text{cm}$

2.44. $V=18\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r=3\ \text{cm},\ l=9\ \text{cm},\ h=6\sqrt{2}\ \text{cm}\right)$

2.45. **a)** $A_O=45\pi\ \text{cm}^2,\ V=9\sqrt{15}\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r=3\ \text{cm},\ h=3\sqrt{15}\ \text{cm}\right)$**,**

b) $A_O=108\pi\ \text{cm}^2,\ V=72\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r=6\ \text{cm},\ h=6\sqrt{3}\ \text{cm}\right)$ **,**

c) $A_O=189\pi\ \text{cm}^2,\ V=189\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r=9\ \text{cm},\ h=7\sqrt{3}\ \text{cm}\right)$

2.46. $A_O=3\pi\ \text{cm}^2,\ V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ \text{cm}^3$

2.47. $A_O=24\pi\ \text{cm}^2,\ V=12\pi\ \text{cm}^3$

2.48. $A_O=75\pi\ \text{cm}^2,\ V=\frac{125\sqrt{3}}{3}\pi\ \text{cm}^3$

2.49. $A_O=12\left(2\sqrt{3}+3\right)\pi\ \text{cm}^2,\ V=24\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$

2.50. $A_O=96\pi\ \text{cm}^2,\ V=96\pi\ \text{cm}^3$

2.51. $5\ \text{cm},\ 12\ \text{cm}\ \ (r=5\ \text{cm},\ h=12\ \text{cm})$

2.52. $A_O=144\pi\ \text{cm}^2,\ V=144\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3$

2.53. $A_O = 50\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2,\ V = \dfrac{250}{3}\pi\ \text{cm}^3$

2.54. $A_O = 25\left(2\sqrt{3}+3\right)\pi\ \text{cm}^2,\ V = 125\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r = 5\sqrt{3}\ \text{cm},\ h = 5\ \text{cm}\right)$

2.55. $A_O = 75\ \text{cm}^2,\ V = \dfrac{125}{3}\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r = 5\ \text{cm},\ h = 5\sqrt{3}\ \text{cm}\right)$

2.56. $A_O = 25\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\pi\ \text{cm}^2,\ V = \dfrac{125}{2}\pi\ \text{cm}^3$

2.57. $A_O = 40\pi\ \text{cm}^2,\ V = 32\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r = 4\ \text{cm},\ l = 5\ \text{cm}\right)$

2.58. $A_O = 130\pi\ \text{cm}^2,\ V = 200\pi\ \text{cm}^3,\ \left(r = 5\ \text{cm},\ l = 13\ \text{cm}\right)$

2.59. a) $A_G = 18\ \text{cm}^2$, **b)** $A_O = 108\ \text{cm}^2$, **c)** $V = 54\ \text{cm}^3$

2.60. a) $A_G = 24\ \text{cm}^2$, **b)** $V = 240\ \text{cm}^3$, **c)** $A_O = 248\ \text{cm}^2$

2.61. a) $A_O = 18\left(\sqrt{2}+3\right)\ \text{cm}^2$, **b)** $V = 18\ \text{cm}^3$

2.62. a) $A_O = 296\ \text{cm}^2$, **b)** $V = 280\ \text{cm}^3$

2.63. $V_Z = \dfrac{a^3}{4\pi},\ V_K = \dfrac{\sqrt{15}}{192}\pi a^3,\ \dfrac{V_K}{V_Z} = \dfrac{\sqrt{15}}{48}\pi^2 \approx 0{,}796,\quad 79{,}6\%$

2.64. $\dfrac{V_Z}{V_k} = \dfrac{3\sqrt{5}}{25},\ \left(R = \sqrt{5}r\right)$

2.65. $A_M = 384\ \text{cm}^2$

2.66. $V = 192\ \text{cm}^3,\ \left(H = 12\ \text{cm}\right),\quad A_O = 24\left(\sqrt{10}+\sqrt{17}+4\right)\ \text{cm}^2$

2.67. a) $V = 384\sqrt{2}\ \text{cm}^3$ **b)** $R = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$, **c)** $V_K = \dfrac{1000\sqrt{2}}{3}\pi\ \text{cm}^3$, **d)** $\dfrac{V_K}{V_P} = \dfrac{250}{288}\pi$

2.68. a) $A_O = 4\left(3\sqrt{5}+5\right)\pi\ \text{cm}^2$, **b)** $V = \dfrac{80}{3}\pi\ \text{cm}^3$

2.69. $A_S = 9\pi\ \text{cm}^2,\ V_1 = 15\pi\ \text{cm}^3,\ V_2 = 105\pi\ \text{cm}^3$

2.70. 6 cm, 8 cm

2.71. 24 cm, 10 cm

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1. Eine Münze wird zweimal geworfen; (K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z);

$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$; $A = \{(K, Z), (Z, K)\}$

3.2. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6)\}$

a) $A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

b) $B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3),$
$(4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

c) $C = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ **d)** $D = \{(2, 3), (3, 2), (1, 6), (6, 1)\}$

e) $E = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (6, 6), (6, 2), (2, 6)\}$

3.3. Ω = {a, ä, b, c ,d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, ö, p, q, r, s, ß, t, u, ü, v, w, x, y, z}

a) A = {a, ä, e, i, o, ö, u, ü, y},

b) B = {b, c ,d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, ß, t, v, w, x, z}

3.4. $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, g_1, g_2, g_3, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

a) $A = \{r_1, r_2, r_3\}$ **b)** $B = \{r_1, r_2, r_3, g_1, g_2, g_3\}$ **c)** $C = \{g_1, g_2, g_3, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

3.5. a) $P(A) = \frac{3}{11}$ **b)** $P(B) = \frac{2}{11}$ **c)** $P(C) = \frac{1}{11}$ **d)** $P(D) = \frac{2}{11}$

3.6. a) $P(T) = \frac{3}{10}$, **b)** $P(G) = \frac{1}{5}$, **c)** $P(N) = \frac{1}{2}$

3.7. a) $P(A) = \frac{4}{9}$ **b)** $P(B) = \frac{3}{9}$ **c)** $P(C) = \frac{2}{3}$

3.8. a) $P(A) = \frac{5}{12}$ **b)** $P(B) = \frac{11}{36}$ **c)** $P(C) = \frac{5}{12}$

3.9. a) $P(A) = \frac{5}{12}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{6}$ **c)** $P(C) = \frac{1}{12}$

3.10. a) $P(A) = \frac{1}{2}$ **b)** $P(B) = \frac{2}{3}$ **3.11.** $P(A) = \frac{5}{12}$ **3.12.** F – rot, H – blau

a) $P(A) = \frac{1}{12}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{4}$ **3.13.** $P(A) = \frac{25}{49}$ **3.14. a)** $P(A) = \frac{5}{12}$

b) $P(B) = \frac{7}{12}$ **c)** $P(C) = \frac{5}{7}$ **3.15.** $P(A) = \frac{44}{66}$ **3.16. a)** $P(A) = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{1}{4}$ **c)** $P(C) = \frac{1}{2}$ **d)** $P(D) = \frac{3}{10}$ **3.17. a)** $P(A) = \frac{3}{8}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{4}$

c) $P(C) = \frac{1}{2}$ **3.18.** $P(A) = \frac{4}{6}$ **3.19. a)** $P(A) = \frac{1}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{3}$

3.20. a) $P(A) = \frac{1}{32}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{4}$ **c)** $P(C) = \frac{1}{2}$ **3.22. a)** Es werden drei rote Kugeln gezogen, Die erste und die dritte gezogene Kugel ist grün, die zweite ist rot

b) $P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$ **3.24.** $\frac{1}{9}$ **3.25. a)** $P(A) = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26}$ **b)** $P(B) = \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26}$

3.26. a) $P(A) = 0$ **b)** $P(B) = \frac{39}{684}$ **3.27. a)** $P(A) = \frac{1}{5}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{5}$

3.28. a) $P(A) = 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}48$ **b)** $P(A) = 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52$

c) $P(A) = 1 - 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}48$ **3.30. a)** $P(A) = \frac{96}{100} \cdot \frac{96}{100} \cdot \frac{96}{100} \cdot \frac{96}{100} \cdot \frac{96}{100}$

b) $P(B) = \frac{20}{100} \left(\frac{96}{100}\right)^4$, $P(A) > P(B)$

3.31. a) $P(A) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29}$ **b)** $P(B) = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29}$ **c)** $P(C) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} + \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29}$

3.32. a) $P(A) = \frac{1}{16}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{4}$ **c)** $P(C) = \frac{3}{8}$

3.33. a) $P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4}$

3.34. a) $P(A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24}$ **b)** $P(B) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24}$ **c)** $P(C) = \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24}$ **d)** $P(D) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24}$

e) $P(E) = \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24}$

3.35. a) $P(A) = \left(\frac{40}{100}\right)^4$ **b)** $P(B) = \left(\frac{60}{100}\right)^4$ **c)** $P(C) = 6 \cdot \left(\frac{40}{100}\right)^2 \left(\frac{60}{100}\right)^2$

3.36. b) $P(B) = \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{16} + \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} + \frac{2}{16} \cdot \frac{2}{16}$

c) $P(C) = \frac{8}{16} \cdot \frac{6}{16} + \frac{8}{16} \cdot \frac{2}{16} + \frac{6}{16} \cdot \frac{8}{16} + \frac{6}{16} \cdot \frac{2}{16} + \frac{2}{16} \cdot \frac{8}{16} + \frac{2}{16} \cdot \frac{6}{16}$

3.37. a) $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cap C = \{2\}$, $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6)$

b) $A' = \{4, 5, 6\}$, $(A \cap B)' = \{3, 4, 5, 6\}$, $\Omega \setminus B = \{3, 4\}$

3.38. a) $\overline{A \cap B} = 2$, $\overline{A \cup B} = 8$, $\overline{\overline{A'}} = 8$, $\overline{\overline{B'}} = 6$, $\overline{A \setminus B} = 2$, $\overline{B \setminus A} = 4$, $\overline{A \cap B'} = 2$,

$\overline{A' \cup B} = 10$, $\overline{A' \cap B'} = 4$, $\overline{A' \cup B'} = 10$, $\overline{A' \setminus B} = 4$, $\overline{B' \setminus A} = 4$

b) $\overline{\overline{A}} = 6$, $\overline{\overline{B}} = 6$, $\overline{\overline{C}} = 6$, $\overline{\overline{A'}} = 11$, $\overline{\overline{B'}} = 11$, $\overline{\overline{C'}} = 11$, $\overline{\overline{A' \cap B' \cap C'}} = 5$,

$\overline{(A' \cup B') \cap C'} = 9$, $\overline{A \cap (B \cup C')} = 5$

3.39. $\overline{A \cup B} = 4$, $\overline{A \cap B} = 2$, $\overline{\overline{B'}} = 3$, $\overline{A' \cup B} = 5$, $\overline{A' \cap B'} = 2$

3.40. A_2 und A_7, A_1 und A_6

3.42. $K \cup B$ - es wird eine Karokarte oder ein Bube gezogen,

$K \cap F$ - es wird eine Karokarte und eine Figur gezogen,

$K \cap B$ - es wird eine Karokarte und ein Bube gezogen,

$K \cup F$ - es wird eine Karokarte oder eine Figur gezogen,

$K' \cap F$ - es wird keine Karokarte und eine Figur gezogen,

$B \cup F'$ - es wird ein Bube oder eine Lusche gezogen.

3.43. $P(A) = \frac{81}{100}$ **3.44. a)** $P(A) = \frac{30}{36}$ **b)** $P(B) = \frac{35}{36}$ **c)** $P(C) = \frac{33}{36}$

3.45. $P(A) = \frac{84}{90}$ **3.46. a)** $P(A) = \frac{1}{32}$ **b)** $P(B) = \frac{26}{32}$ **3.47.** $P(A) = \frac{189}{216}$

3.48. a) A', $P(A') = \frac{92}{100}$ **b)** B', $P(B) = \frac{94}{100}$ **c)** $A \cap B$, $P(A \cap B) = \frac{1}{100}$

d) $A' \cap B'$, $P(A' \cap B') = \frac{87}{100}$ **e)** $A' \cup B'$, $P(A' \cup B') = \frac{99}{100}$

f) $A \cup B$, $P(A \cup B) = \frac{13}{100}$ **3.49. a)** $P(A) = \frac{3}{20}$ **b)** $P(B) = \frac{19}{20}$

c) $P(C) = \frac{1}{20}$ **3.50.** $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(A' \cap B) = 0{,}2$, $P(A' \cup B') = 0{,}7$

3.51. $P(A \cap B) = 0{,}4$ $P(A' \cap B) = 0{,}2$, $P(A' \cap B') = 0{,}1$ **3.52.** $P(A) = \frac{29}{100}$

3.53. a) $P(A) = \frac{65}{110}$ **b)** $P(B) = \frac{36}{110}$ **c)** $P(C) = \frac{54}{110}$ **3.54.** $P(A) = \frac{20}{32}$

3.55. $P(A) = \frac{20}{32}$ **3.56.** $P(A) = 0{,}38$ **3.57.** $P(A) = 0{,}1$ **3.58.** $8 \cdot 5 = 40$

3.59. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ **3.60.** $200 \cdot 199 \cdot 198$ **3.61.** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

3.62. 10^6, 10^4 **3.63.** $11\frac{1}{9}$ h **3.64.** $5 \cdot 4 \cdot 3$, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ **3.65.** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

3.66. $9 \cdot 9 \cdot 8$ **3.67.** $3 \cdot 2 \cdot 1$ **3.68.** 4^3 **3.69.** 2^6 **3.70. a)** 4^3

b) 4 **c)** 12 **d)** $4 \cdot 3 \cdot 2$ **e)** 4^2

4. Beschreibende Statistik

4.3 **a)** 11 811 023 **b)** 35608308

4.4 **a)** 15, 10 **b)** 2077 **c)** 423 **d)** 969

4.5 **b)** 440 c) 140 **d)** 220

4.6 **a)** 54

4.7 **a)** 0,15 **b)** 0,15 **c)** 0,09

4.8 **b)** 0,18 c) 0,15

4.9 **b)** 19% **c)** 19% **d)** 41%

e)

Hobby	**Fernsehen**	**Computer**	**Kino**	**Musikhören**	**Sport**	**Freunde treffen**
absolute Häufigkeit	20	15	9	15	9	23
relative Häufigkeit	0,22 22%	0,165 16,5%	0,1 10%	0,165 16,5%	0,1 10%	0,25 25%

4.11 **b)** 85% **c)** 5%

4.12 0,29 0,21 0,12 0,17 0,21

4.13 **a)** **b)** 0,85

0	1	2	3
5	11	13	5
0,15	0,32	0,38	0,15

4.14 **a)** $m_e = 27$ **b)** $m_e = 34{,}5$

4.15 $\bar{x} = 19$ $m_e = 12$

4.17 11, $m_e = 8$

4.18 c)A 0,66 B 0,73 d) 110,6%

4.19 Er muss eine 5 erreichen.

4.20 **a)** 4 **b)** 5,55 **c)** 3,57

4.21 $\bar{x} = 292$, $m_e = 120$,1312 m, 1140 m

4.22 Ulrike $\bar{x} = 352{,}3$, $\bar{\sigma}^2 = 216{,}21$, $\bar{\sigma} = 14{,}7$ Oliver $\bar{x} = 408{,}63$, $\bar{\sigma}^2 = 341{,}98$, $\bar{\sigma} = 18{,}49$

4.23 18 mal, $\bar{x} = 3{,}63$, $\bar{\sigma}^2 = 2{,}59$, $\bar{\sigma} = 1{,}61$

4.24 $\bar{x} = 2377{,}25$, $\bar{\sigma} = 31{,}5$, $m_e = 2371{,}5$

4.25 $\bar{\sigma}_x = 4{,}74$g , $\bar{\sigma}_y = 2{,}69$g

4.26 $\bar{x} = 170{,}11$, $\bar{\sigma} = 184{,}2$ $\bar{x} = 107{,}6$ $\bar{\sigma} = 80$

4.27 $\bar{x}_A = 1{,}4$, $\bar{x}_B = 0{,}9$ $\bar{\sigma}_A = 0{,}9$ $\bar{\sigma}_A = 1{,}4$

4.28 $\bar{x} = 6$, $\bar{\sigma} = 1{,}4$

Abiturbogen A

Aufgabe 1 A **a)** $A=\{6,12\}$, $B=\{1,2,3,4,6,8,12\}$, $C=\{1,8\}$

b) $A\cap B=\{6,12\}$ **c)** $A\cup C=\{1,6,8,12\}$

d) $A\setminus C=\{6,12\}$ **e)** $A\cap C=\varnothing$

Aufgabe 2 A **a)** $D_f=R$ **b)** $W_f=\langle -1,+\infty)$ **c)** $x=1$, $x=3$ **d)** $\langle 2,+\infty)$

e) $(-\infty,2\rangle$ **f)** $(1,3)$ **g)** $f(x)=x^2-4x+3$

Aufgabe 3 A **a)** 6 cm, 12 cm **b)** $3\sqrt{5}$

Aufgabe 4 A **a)** $\frac{45}{8}a$ **b)** $6a$ **c)** $\frac{85\sqrt{3}}{256}a^2$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$

Aufgabe 5 A **a)** $|AB|=5$, $|AC|=5\sqrt{2}$, $|BC|=5$ **b)** rechtwinklig und gleichschenklig

c) $P=\frac{25}{2}\text{ FE}$ **d)** $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **e)** $r=5-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

f) $x-7y+6=0$ $\left(y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}\right)$ **g)** $|AE|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 6 A **a)** $10\sqrt{2}\text{ cm}$ **b)** $5\pi+10\sqrt{2}\text{ cm}$ **c)** $25\pi-50\text{ cm}^2$

Aufgabe 7 A **a)** $a=6\text{ cm}$, $P=36\sqrt{6}+9\sqrt{3}\text{ cm}^2$, $P\approx 103{,}77\text{ cm}^2$,

$V=9\sqrt{31}\text{ cm}^3$, $V\approx 50{,}11\text{ cm}^3$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{31}}{2}$, $\alpha\approx 70^\circ$

Aufgabe 8 A **a)** C **b)** D **c)** D

Abiturbogen B

Aufgabe 1 B **a)** $A=\{2,3,5,7,11\}$, $B=\{4,6,8,9,10\}$, $C=\{1,3,5,7,9,11\}$

b) $A\cap C=\{3,5,7,11\}$ **c)** $A\cup C=\{1,2,3,5,7,9,11\}$ **d)** $B\setminus C=\{4,6,8,10\}$

Aufgabe 2 B $k=\frac{5}{3}$ Umfänge: 12 cm, 20 cm

Aufgabe 3 B **a)** $a_{10}=20\cdot(1{,}05)^9\approx 31{,}03$ **b)** $S_{10}=400\cdot\left(1{,}05^{10}-1\right)\approx 251{,}56$

Aufgabe 4 B **a)** $|AB|=6$, $|AC|=6$, $|BC|=6$ **b)** $P=9\sqrt{3}\text{ FE}$ **c)** $R=2\sqrt{3}$ **d)** $r=\sqrt{3}$

e) 3 Symmetrieachsen: $y=-1$, $y=\sqrt{3}x-7$, $y=-\sqrt{3}x+5$ **f)** $S=\left(2\sqrt{3},-1\right)$

Aufgabe 5 B **a)** $P(A)=\frac{1}{12}$, **b)** $P(B)=\frac{5}{18}$, **c)** $P(C)=\frac{11}{36}$

Aufgabe 6 B **a)** $D_f=\langle -2,\ 3\rangle$ **b)** $x=-1$, $x=2$ **c)** $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3$

d) $W_f=\left\langle -3\frac{3}{8},\ 6\right\rangle$ **e)** $\left\langle \frac{1}{2},\ 3\right\rangle$ **f)** $\left\langle -2,\ \frac{1}{2}\right\rangle$ **g)** $x=\frac{1}{2}$

Aufgabe 7 B **a)** $V=16\sqrt{5}\text{ cm}^3$, $V\approx 35{,}78\text{ cm}^3$ **b)** $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\approx 48^\circ$

Aufgabe 8 B **a)** A **b)** D **c)** C

Abiturbogen C

Aufgabe 1 C a) $\overline{\overline{A}}=25$ **,** $\overline{\overline{B}}=20$ **b)** $\overline{\overline{A\cap B}}=5$ **c)** $\overline{\overline{A\cup B}}=40$

Aufgabe 2 C a) 145 € **b)** 1225 €

Aufgabe 3 C a) $|AB|=\sqrt{22}$ **,** $|AC|=\sqrt{22}$ **,** $|BC|=4$ **b)** $P=6\sqrt{2}$ FE

c) $R=\frac{11}{6}\sqrt{2}$ **d)** $r=\frac{2}{3}\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)$

e) 1 Symmetrieachse: $y=-1$ **f)** $S=\left(2\sqrt{2},-1\right)$

Aufgabe 4 C $P=(1;\ 5{,}5)$

Aufgabe 5 C $\overline{\overline{\Omega}}=120$ **a)** $P(A)=\frac{3}{20}$ **b)** $P(B)=\frac{7}{40}$

Aufgabe 6 C a) $D_f=\langle -2,4\rangle$ **b)** $x=-1$ **,** $x=3$ **c)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

d) $W_f=\left\langle -\frac{5}{2},\ 2\right\rangle$ **e)** $\langle -2,\ 1\rangle$ **f)** $\langle 1,\ 4\rangle$ **g)** $x=1$

Aufgabe 7 C a) $H=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm **b)** $V=5\sqrt{3}$ cm^3 **c)** $P_b=\frac{3\sqrt{91}}{4}+2\sqrt{21}+\frac{25}{4}\sqrt{3}$ cm^2

Aufgabe 8 C a) ***D*** **b)** ***B*** **c)** ***D***

8. Fachwortschatz

A

Abmessung *die*; –; *nur Sg* **-** wymiary
abnehmen, nahm ab, *hat* abgenommen - ubywać, zmniejszać
Abstand *der*; -(*e*)*s*; *Abstände* - odległość
Abszisse *die*; *–; -en* - odcięta
Abweichung *die*; –, *-en* - odchylenie
    mittlere quadratische Abweichung - średnie kwadratowe odchylenie
    prozentuale Abweichung - odchylenie podane w procentach
    Standardabweichung – odchylenie standardowe
Achse *die*; –, *-n* - oś
    Abszissenachse - oś odciętych (oś x)
    Koordinatenachse - oś układu współrzędnych
    Ordinatenachse - oś rzędnych (oś y)
    Symmetrieachse - oś symetrii
Achsenkreuz *das*; *-es*; *-e* - układ współrzędnych
Achsenschnitt *der; -(e)s, -e* - przekrój osiowy
    Achsenschnitt eines Kegels - przekrój osiowy stożka
    Achsenschnitt eines Zyliners - przekrój osiowy walca
Achsensymmetrie *die*; –, *-n* - symetria osiowa
achsensymmetrisch - osiowosymetryczny
    achsensymmetrisch zu den beiden Winkelhalbierenden - symetryczny względem obu dwusiecznych (układu współrzędnych), prostych o równaniach $y = x$ i $y = -x$
    punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - środkowo symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
Achteck *das*; *-s*, *-e* - ośmiokąt
    ein regelmäßiges Achteck - ośmiokąt foremny
addieren; addierte, *hat* addiert - dodawać
ähnlich - podobny
    ähnliche Dreiecke - trójkąty podobne
Ähnlichkeit *die*; –, *-en* - podobieństwo
    Ähnlichkeitsfaktor *der* - skala podobieństwa
    Ähnlichkeitsmaßstab *der* **-** skala podobieństwa
    Ähnlichkeitssatz *der*; *-es*; *Sätze* - cechy przystawania
allgemeine Form - postać ogólna
    allgemeine Form der Geradengleichung - ogólna postać równania prostej
alternieren; alternierte, *hat* alterniert - przemieniać
    etwas alterniert mit etwas - coś przemienia się z czymś
analytische - analityczna
    analytische Geometrie - geometria analityczna
Anfangsglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz początkowy (Np. początkowy czyli pierwszy wyraz ciągu)
Anfangswert *der;-(e)s, -e* - wartość początkowa
Ankathete *die*; –; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym przylegla do kąta
Argument *das*; *-es; -e* - argument
Ast *der*; -(*e*)*s*, *Äste* - gałąź
    Äste der Hyperbel - gałęzie hiperboli

Asymptote *die*; –, *-n* - asymptota
Gleichung der senkrechten Asymptote - równanie asymptoty pionowej
Gleichung der waagerechten Asymptote - równanie asymptoty poziomej
schiefe / schräge Asymptote - asymptota ukośna / pochyła
senkrechte Asymptote - asymptota pionowa
waagerechte Asymptote - asymptota pozioma
aufzählen; zählte auf, *hat* aufgezählt - wyliczać, wyliczyć
Ausdruck *der*; -(*e*)*s*; *Ausdrücke* - wyrażenie
Ausgangsbruchgleichung *die*; -, *-en* - równanie wymierne początkowe
Ausprägung *die; -,-en* - tu:odbicie
Ausreißer *der;-s, –* - uciekinier
Auswertung *die; -, -en* - analiza
ausklammern; klammerte aus, *hat* ausgeklammert - wyłączyć przed nawias

B

Basis *die*; −, *Basen* - podstawa
Basis einer Potenz - podstawa potęgi
Grundseite des Dreiecks - podstawa trójkąta
Bedingung *die; -,-en* - warunek
Rahmenbedingungen - warunki ramowe
Befragung *die;-;-en* – badanie, wywiad
Beschreibung *die*; –, *-en* - opis, opisanie
rekursive Beschreibung - postać rekurencyjna (ciągu)
Betrag *der*; *-s*, *Beträge* - suma, kwota, *mat.* wartość bezwzględna
Betrag einer Zahl - wartość bezwzględna liczby
Betrag eines Vektors - moduł wektora, długość wektora
Binom *das*; *-s*, *-e* - dwumian
binomische Formeln *Pl* - wzory skróconego mnożenia
Bogenmaß *das* - miara łukowa kąta (w radianach)
Bogen *der; -s, - / Bögen* - łuk, arkusz (papieru)
Kreisbogen - łuk koła
Bogenlänge *die*- długość łuku

Bruch *der*; -(*e*)*s, Brüche* - ułamek
Bruchgleichung - równanie wymierne
Bruchstrich - kreska ułamkowa
Bruchterm - wyrażenie wymierne
Doppelbruch - ułamek piętrowy
echter Bruch - ułamek właściwy
gleichnamige Brüche - ułamki o tym samym mianowniku
Kehrbruch - ułamek odwrotny
Stammbruch - ułamek prosty (o liczniku 1)
unechter Bruch - ułamek niewłaściwy
Bruchterm *der*; *-s*, *-e* - wyrażenie wymierne
Bruchgleichung *die*; –; *-en* - równanie wymierne

D

Darstellung *die*; –, *-en* - przedstawienie
rekursive Darstellung - postać rekurencyjna (ciągu)
Daten *Pl.* - dane statystyczne

Diagramm *das; -s, -e* - diagram, wykres
  Balkendiagramm - diagram słupkowy
  Kreisdiagramm - diagram kołowy
  Säulendiagramm - diagram kolumnowy
    gruppiertes Säulendiagramm – zgrupowany diagram kolumnowy
  Streifendiagramm - diagram prostokątny
Deckfläche *die; -, -n* - powierzchnia górna (w bryle)
deckungsgleich, **kongruent** - przystający
Definitionsbereich *der*; -(*e*)*s*; *-e* - dziedzina
Definitionsmenge *die*; –; *-n* - dziedzina
Diagonale *die*; –; *-n* - przekątna
  Seitendiagonale - przekątna ściany bocznej w bryle
  Raumdiagonale - przekątna bryły
Differenz *die*; –, *-en* - różnica
  Differenz der arithmetischen Folge - różnica ciągu arytmetycznego
dividieren; dividierte, *hat* dividiert - dzielić
doppelt - podwójny
Doppelte *das* - dwukrotność
Drachen *der*; *-s*, − - latawiec, lotnia
Drachenviereck *das*; *-s*, *-e* - deltoid
Dreieck *das; -s; -e* - trójkąt
  ähnliche Dreiecke - trójkąty podobne
  beliebiges Dreieck - dowolny trójkąt
  gleichschenkliges Dreieck - trójkąt równoramienny
  gleichseitiges Dreieck - trójkąt równoboczny
  kongruente Dreiecke - trójkąty przystające
  rechtwinkliges Dreieck - trójkąt prostokątny
  spitzwinkliges Dreieck - trójkąt ostrokątny
  stumpfwinkliges Dreieck - trójkąt rozwartokątny

Dreieckspyramide *die*; −, *-n* - ostrosłup prawidłowy trójkątny
Drehachse *die*; –, *-n* - oś obrotu
drehen, drehte*, hat* gedreht – obracać, kręcić się
  sich drehen um etwas – wirować wokół czegoś
Drehkörper *der; -s, –* - bryła obrotowa
Drehung *die; -, -en* - obrót, rotacja
  Drehung um etwas - obrót wokół czegoś
Durchmesser *der*; *-s*; - - średnica

Durchschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - średnia, przeciętna
  Durchschnitt = **arithmetisches Mittel** - średnia arytmetyczna
  Durchschnitt, Schnittmenge, Durchschnittsmenge - iloczyn zbiorów

E

Ecke *die; -, -n* - punkt w którym się dwie linie lub powierzchnie przecinają, (w bryle wierzchołek)
Eckpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wierzchołek
  Eckpunkt des Dreiecks - wierzchołek trójkata
Element *das*; -(*e*)*s*; *-e* - element
Endglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz ostatni (Np. ostatni wyraz ciągu)

Endpunkt *der; -(e)s; -e -* koniec
Endpunkt einer Strecke - koniec odcinka
Ereignis *das; -ses, -se* - wydarzenie, zjawisko
Massenereignis - zjawisko masowe
Ergebnis *das; -ses; -se -* wynik
Messergebnis - wynik mierzalny
Erhebung *die;-,-en* - badanie, pobieranie
statistische Erhebung - badanie statystyczne
Ersteller *der; -s, – -* budowniczy
Statistikersteller - osoba zbierająca dane ststystyczne
Experiment *das;-(e)s, -e -* eksperyment
Exponent *der*, *-en*, *-en* - wykładnik potęgi
Exponentenschreibweise *die* **-** notacja wykładnicza
Exponentialdarstellung *die* **-** notacja wykładnicza
Exponentialfunktion *die*; –, *-en* - funkcja wykładnicza
Exponentialkurve *die*; –, *-n* - krzywa wykładnicza

F

Faktor *der*; *-s*; *-en* **-** czynnik
Wachstumfaktor *der; -s, ...oren* **-** współczynnik wzrostu
faktorisieren; faktorisierte, *hat* faktorisiert **-** rozkładać na czynniki
Festgeld *das* **-** lokata w banku, czyli pieniądze złożone w banku na określony czas np. miesiąc, trzy miesiące, pół roku, lokata terminowa, która ma z reguły wyższe oprocentowanie niż rachunek bieżący
Fläche *die; –, -n* - powierzchnia
Deckfläche *die; -, -n* **-** powierzchnia górna (w bryle)
Grundfläche *die; -, -n* - powierzchnia podstawy
Seitenfläche *die* **-** powierzchnia ściany (w bryle)

Flächeninhalt *der*; -(*e*)*s*; *-e -* pole powierzchni
Folge *die*; -, *-n* - ciąg
abnehmende Folge - ciąg malejący
alternierende Folge - ciąg naprzemienny
arithmetische Folge - ciąg arytmetyczny
Folgenglied - wyraz ciągu
geometrische Folge - ciąg geometryczny
konstante Folge - ciąg stały
Zahlenfolge - ciąg liczbowy
zunehmende Folge - ciąg rosnący
Folgenglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz ciągu
Form *die*; –; *-en -* postać
allgemeine Form einer Geradengleichung - ogólna postać równania prostej
faktorisierte Form - postać iloczynowa
Fragebogen *der* **-** ankieta, kwestionariusz
Funktion *die*; –; *-en -* funkcja
(allgemeine) Exponentialfunktion - funkcja wykładnicza
fallende Funktion - funkcja malejąca
gebrochenlineare Funktion - funkcja homograficzna
gebrochenrationale Funktion - funkcja wymierna
gerade Funktion - funkcja parzysta
konstante Funktion - funkcja stała

Kosinusfunktion - funkcja cosinus
Kotangensfunktion - funkcja cotangens
lineare Funktion - funkcja liniowa
periodische Funktion - funkcja okresowa
Potenzfunktion - funkcja potęgowa
quadratische Funktion - funkcja kwadratowa
Sinusfunktion - funkcja sinus
steigende Funktion - funkcja rosnąca
streng monoton fallende Funktion - funkcja ściśle malejąca
streng monoton steigende Funktion - funkcja ściśle rosnąca
Tangensfunktion - funkcja tangens
trigonometrische Funktion - funkcja trygonometryczna
Umkehrfunktion - funkcja odwrotna
ungerade Funktion - funkcja nieparzysta
wachsende Funktion - funkcja rosnąca
Wachstumfunktion - funkcja wzrostu
Zerfallfunktion - funkcja rozpadu
Funktionsgleichung *die; –; -en* - wzór funkcji
Funktionsgraf *der*; *-en*, *-en* - wykres funkcji
Funktionswert *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wartość funkcji
Funktionswert der Funktion *f* **an der Stelle** x_0 **-** wartość funkcji *f* w punkcie x_0 $f\left(x_0\right)$

G

Gegenkathete *die*; –; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym leżąca naprzeciw kąta prostego
Geometrie *die*; –; *nur Sg* - geometria
analytische Geometrie - geometria analityczna
Gesamtheit *die;-, –* zbiorowość, ogół
Grundgesamtheit – populacja generalna, zbiorowość generalna
Gleichung *die*; -, *-en* - równanie
Ausgangsbruchgleichung - równanie wymierne początkowe
Ausgangsgleichung - równanie początkowe
biquadratische Gleichung - równanie dwukwadratowe
Bruchgleichung - równanie wymierne
Gleichung einer Asymptote - równanie asymptoty
Gleichung ersten Grades - równanie stopnia pierwszego
Gleichung *n*-ten Grades - równanie stopnia *n*-tego
Gleichung zweiten Grades - równanie stopnia drugiego
Gleichung einer Geraden - równanie prostej
Gleichung eines Kreises - równanie okręgu
Polynomgleichung - równanie wielomianowe
Zweipunkteform einer Geradengleichung - równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty
Gleichungssystem - układ równań
Glied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz
allgemeines Glied - wyraz ogólny
Anfangsglied -wyraz początkowy
benachbartes Glied - wyraz sąsiedni
Endglied - wyraz końcowy
Folgenglied - wyraz ciągu

Mittelglied - wyraz środkowy
***n*-tes Glied** - wyraz *n*-ty
Grad *der*; -(*e*)*s*; *Grade/Grad* - stopień
Grad des Polynoms - stopień wielomianu
Polynom ersten Grades - wielomian stopnia pierwszego
Polynom vom Grad Null - wielomian stopnia zerowego
Polynom zweiten Grades - wielomian stopnia drugiego
Grundlinie *die*; –; -*n* - podstawa, np. trójkąta
Gradmaß *das* - miara kąta w stopniach
Graph *der*; -*en*, -*en* - wykres
anhand des Graphen - na podstawie wykresu
Graph der Funktion - wykres funkcji
den Graphen der Funktion zeichnen - narysować wykres funkcji
Grund *der; -(e)s; nur Sg* – podstawa, grunt
Grundfläche *die; -, -n* - powierzchnia podstawy
Grundkante *die; -, -n* - krawędź podstawy
Grundkreis - podstawa stożka, walca
Grundkreisradius –promień podstawy stożka, walca
Grundseite *die*; –; -*n* - podstawa, np. trójkąta

H

Halbmesser *der*; -*s;* – - promień okręgu, koła
Halbwertszeit *die;-, -en* - czas połowicznego rozpadu
Hauptnenner *der* - wspólny mianownik, będący najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników poszczególnych ułamków
Hauptnenner ermitteln - ustalić (wyznaczyć) najmniejszy wspólny mianownik
Häufigkeit *die;-, -en* – częstość
absolute Häufigkeit - częstość bezwzględna, liczebność
relative Häufigkeit - częstość bezwzględna
Höhe *die*; –; -*n* - wysokość
Seitenhöhe *die* - wysokość ściany bocznej
Höhenfußpunkt *der* – spodek wysokości
Höhenschnittpunkt *der*; -(*e*)*s*; -*e* - punkt przecięcia wysokości w trójkącie
Hyperbel *die*, –, -*n* - hiperbola
die Äste einer Hyperbel - gałęzie hiperboli
die Zweige einer Hyperbel - gałęzie hiperboli
Hypotenuse *die*; –; -*n* - przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym

I

Inflation *die*; -, -*en*; *meist Sg* - inflacja
Inflationsrate *die* **-** stopa inflacji (wyrażana w procentach)
monatliche Inflationsrate - miesięczna stopa inflacji (wyrażana w procentach)
jährliche Inflationsrate - roczna stopa inflacji (wyrażana w procentach)
Inkreis *der; -es; -e* - okrąg wpisany
Inkreismittelpunkt *der; -(e)s; -e* - środek okręgu wpisanego
Inkreisradius *der*; –; -*radien* - promień okręgu wpisanego
Innenwinkel *der*; -*s*; – - kąt wewnętrzny
Intervall *das*; -*s*; -*e* - przedział

K

Kante *die*; −, *-n* - krawędź (bryły)
  Seitenkante - krawędź boczna (bryły)
  Grundkante - krawędź podstawy (bryły)
Kapital *das*, *-s*, *-e / -ien meinst Sg* - kapitał
  Anfangskapital - kapitał początkowy
  Endkapital nach Ablauf von *n* Jahren - kapitał końcowy po upływie *n* lat
Kathete *die*; – ; *-n* - przyprostokątna w trójkącie prostokątnym
Kehrbruch *der*; -(*e*)*s, Kehrbrüche* - ułamek odwrotny
Kehrwert *der*, -(*e*)*s*, *-e* - wartość odwrotna
Kehrzahl *die*; -, *-en* - liczba odwrotna
Klammer *die; –; -n* - nawias
  eckige Klammer - nawias kwadratowy
  runde Klammer - nawias okrągły
  geschweifte Klammer - nawias łańcuchowy

Koeffizient *der*; *-en*; *-en* - współczynnik
  Koeffizient des Polynoms - współczynnik wielomianu
kongruent - przystający
Konstante *die* - stała
Koordinate *die*; –; *-n* - współrzędna
Koordinatensystem *das*; *-s*; *-e* - układ współrzędnych
Koordinatenursprung *der; -s; -ursprünge* - początek układu współrzędnych
Kosinus *der*; −, − / *-se*; *meist Sg* - cosinus
Körper *der; -s,* − - bryła
Kotangens *der*; –; – - cotangens
Kreis *der*; *-es*, *-e* - okrąg, koło
  ein Kreis mit dem Radius - okrąg (koło) o promieniu
  einem Kreis ist ein Vieleck einbeschrieben - czworokąt jest wpisany w okrąg
  Einheitskreis - okrąg o promieniu 1 (jednostkowym)
  Kreisbogen - łuk koła
  Gleichung eines Kreises - równanie okręgu
  Ungleichung eines Kreises - nierówność koła
Kreisabschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - odcinek koła
Kreisausschnitt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - wycinek koła
Kreisbogen *der* **-** łuk okręgu
Kreisrandpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - punkt należący do okręgu
Krümmung *die*; –, *-en* - krzywizna
  Krümmung der Kurve - krzywizna krzywej
Kurve *die*; –, *-n* - krzywa
  Exponentialkurve - krzywa wykładnicza
  Kosinuskurve - cosinusoida
  Kotangenskurve - cotangensoida
  Kurve ersten Grades - krzywa pierwszego stopnia
  Kurve *n*-ten Grades - krzywa *n*-tego stopnia
  Kurve zweiten Grades - krzywa stopnia drugiego, parabola
  Sinuskurve - sinusoida
  Tangenskurve - tangensoida

L

Länge *die*; -; *-en* - długość

Länge einer Strecke - długość odcinka

Linearfaktor *der*; *-s*; *-en* - czynnik liniowy

Linearfaktorzerlegung *die*; –, *-en* - rozkład na czynniki liniowe, czyli zapisanie wyrażenia w postaci iloczynu czynników liniowych

Litfaßsäule *die* - słup ogłoszeniowy

Logarithmus *der;-,....men* – logarytm

Zehnerlogarithmus = dekadischer Logarithmus – logarytm przy podstawie 10

natürlicher Logarithmus – logarytm naturalny

Lot *das*; -(*e*)*s*; *-e* - prostopadła

M

Mantel *der; die Mäntel* - powłoka boczna bryły

Mantelfläche *die*; –, *-n* - powłoka boczna bryły

Mantelflächeninhalt *der*; -(*e*)*s, -e*; *meist Sg* - pole powierzchni bocznej bryły

Mantellinie *die; -, -n* – tworząca

Mantellinie eines Kegels – tworząca stożka

Mantellinie eines Zylinders – tworząca walca

Maßstab *der*; *-(e)s*; *-stäbe* - skala

Ähnlichkeitmaßstab - skala podobieństwa

Median *der* - mediana

Menge *die*; −, *-n* - zbiór

Differenzmenge - różnica zbiorów

Durchschnittsmenge - iloczyn zbiorów

Schnittmenge - iloczyn zbiorów

Teilmenge - podzbiór

Vereinigungsmenge - suma zbiorów

Merkmal *das; Pl.-e* – cecha statystyczna

qualitatives Mekmal – cecha mierzalna

quantitatives Merkmal – cecha niemierzalna

Mittel *das*; *-s*, - środek, średnia

arithmetisches Mittel - średnia arytmetyczna

geometrisches Mittel - średnia geometryczna

gewichtetes Mittel - średnia ważona

Mittelglied *das*; -(*e*)*s*, *-er* - wyraz środkowy

Mittelpunkt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - środek

Mittelpunkt einer Strecke - środek odcinka

Mittelpunkt eines Kreises - środek okręgu / koła

Mittelpunkt einer Seite - środek boku (np. trójkąta)

Seitenmittelpunkt - środek boku (np. trójkąta)

Mittelpunktswinkel, Zentriwinkel *der*; *-s*; - - kąt środkowy

Mittelsenkrechte *die; -n; -n* - symetralna odcinka

Modus *der;-, Modi* – moda

Monom *das*; *-s*, *-e* - jednomian

Monotonie *die*; –, *-n* - monotoniczność

Monotonie der Folge - monotoniczność ciągu

multiplizieren; multiplizierte, *hat* multipliziert - mnożyć

N

Nachfolger *der*; -s, – - następca, w ciągu wyraz następny, następnik
Neigungswinkel *der*; *-s*; - kąt nachylenia (dla prostej w układzie współrzędnych kąt jaki tworzy prosta z osią x
Neigungswinkel zwischen Mantellinie und Grundfläche eines Kegels - kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy
Nenner *der*; *-s*, – - mianownik
  Hauptnenner ermitteln - ustalić (wyznaczyć) najmniejszy wspólny mianownik
  Nenner faktorisieren - doprowadzić mianownik do postaci iloczynowej
Normalparabel - parabola o równaniu $y = x^2$
Nullpolynom *das; -s; -e* - wielomian zerowy $W(x) = 0$
Nullpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - początek układu współrzędnych
Nullstelle *die*; –; *-n* - miejsce zerowe
Nullstelle des Polynoms - pierwiastek wielomianu

O

Oberfläche *die;* - powierzchnia całkowita bryły
Oberflächeninhalt *der* - pole powierzchni całkowitej bryły
Objekt *das;-s,-e* – objekt
  Untersuchungsobjekt – obiekt badań
Ordinate *die*; –; *-n* **-** rzędna
Ordinatenachse - oś rzędnych (oś y)
orthogonal - prostopadły
Orthogonale *die*; –; *-en* **-** prosta prostopdła

P

Parabel *die*; –, *-n* - parabola
  Normalparabel - parabola o równaniu $y = x^2$
  Wendeparabel *die*; –, *-n* - krzywa o równaniu $y = x^3$**,** $y = x^5$**,** $y = x^{2n+1}$
parallel - równoległy
Parallele *die*; –; *-n* - prosta równoległa
Parallelogramm *das*; *-s*; *-e* - równoległobok
Peripheriewinkel, **Umfangswinkel -** kąt wpisany
Pfeildiagramm *das*; *-s*; *-e* - diagram, jedna z metod przedstawiania funkcji
Polynom *das*; *-s*; *-e* - wielomian
  ganzzahliges Polynom - wielomian o współczynnikach całkowitych
  Koeffizient des Polynoms - współczynnik wielomianu
  Nullpolynom - wielomian zerowy
  Nullstelle des Polynoms - pierwiastek wielomianu
  Polynom ersten Grades - wielomian stopnia pierwszego
  Polynomgleichung - równanie wielomianowe
  Polynomwert - wartość wielomianu
  Polynom vom Grad Null - wielomian stopnia zerowego
  Polynom zweiten Grades - wielomian stopnia drugiego
Population *die;-,-en* – populacja
Potenz *die*; –, *-en* - potęga
  Exponent der Potenz *der*, *-en*, *-en* - wykładnik potęgi

Primfaktorzerlegung *die*; –, *-en* - rozkład na czynniki pierwsze
Prisma *das; -s, Prismen* - graniastosłup
  gerades Prisma - graniasosłup prosty
Produkt *das*; -(*e*); *-e* - iloczyn
Produktform *die*; –; *-en* - postać iloczynowa
Prozent *das*; -(*e*)*s*, *−/ -e* - procent
  Prozentpunkt *der*; *meist Pl* - punkt procentowy
Punkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - punkt
  Höhenfußpunkt - spodek wysokości
  Schwerpunkt - środek ciężkości (punkt przecięcia środkowych trójkąta)
Punktspiegelung *die*; –, *-en* - symetria środkowa
Punktsymmetrie *die*; –, *-n* - symetria środkowa
punktsymmetrisch - środkowo symetryczny
  punktsymmetrisch zum Nullpunkt - symetryczny względem początku układu współrzędnych
  punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
Pyramide *die*; −, *-n* - ostrosłup, piramida
  Dreieckspyramide - ostrosłup trójkątny
  dreiseitige Pyramide - ostrosłup trójkątny
  quadratische Pyramide - ostrosłup prawidłowy czworokątny
  regelmäßige Pyramide -ostrosłup mający w podstawie wielokąt foremny
  Sechseckspyramide - ostrosłup prawidłowy sześciokątny
  vierseitige Pyramide - ostrosłup czworokątny

Q

Quader *der; -s, -* - prostopadłościan
Quadrant *der*; *-en*; *-en* - ćwiartka układu współrzędnych
Quadrat *das*; -(*e*)*s*; *-e* - kwadrat
Quadratwurzel *der*; –; *-n* - pierwiastek drugiego stopnia
Quersumme *die* - suma cyfr liczby
Quotient *der*; *-en*, *-en* - iloraz
  Quotient der geometrischen Folge - iloraz ciągu geometrycznego
  Quotient zweier linearer Funktionen - iloraz dwóch funkcji liniowych

R

Radikand *der*; *-en*, *-en* - liczba / wyrażenie podpierwiastkowe
Radius *der; –*; *Radien* - promień
Raumdiagonale *die*; –; *-n* **-** przekątna bryły
Rauminhalt *der* – objetość
Raute *die*; –; *-n* - romb
Rechteck *das*; *-s*; *-e* - prostokąt
repräsentativ – reprezentatywny
Rest *der*; -(*e*)*s*; *-e* - reszta
  Rest aus der Division - reszta z dzielenia
Rhombus *der*; —; *Rhomben* - romb
Richtungsfaktor *der*; *-s*; *-en* - współczynnik kierunkowy
Rotation *die; -, -en* – rotacja, obrót
Rotationskörper – bryła obrotowa

rotieren; rotierte*, hat* rotiert – obracać się, wirować
runden; rundete, *hat* gerundet - zaokrąglić

abrunden - eine Zahl nach oben runden - zaokrąglić z nadmiarem
aufrunden - eine Zahl nach unten runden - zaokrąglić liczbę z niedomiarem
eine gerundete Zahl - liczba zaokrąglona
ein Ergebnis auf 2 Dezimalen runden - wynik zaokrąglić do dwóch miejsc po przecinku

S

Säule *die; -, -n -* kolumna
Schaubild *das*; -(*e*)*s*; *-er* - wykres funkcji
Scheitelpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - wierzchołek paraboli, wierzchołek kąta, wierzchołek bryły
Scheitelpunktform *die*; –; *-en* - postać kanoniczna trójmianu kwadratowego
Schenkel *der*; *-s*; – - ramię
Schnitt *der; -(e)s, -e* - cięcie, przekrój

Diagonalschnitt – przekrój bryły zawierający przekątną podstawy
Parallelschitt - przekrój bryły zawierający równoległą do płaszczyzny podstawy
Querschnitt - przekrój poprzeczny
Schnittfläche - powierzchnia, płaszczyzna przekroju

Schnittpunkt *der*; -(*e*)*s*, *-e* - punkt przecięcia

Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen - punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych
Schnittpunkt mit der Abszissenachse - punkt przecięcia z osią odciętych (z osią *x*)
Schnittpunkt mit der Ordinatenachse - punkt przecięcia z osią rzędnych (z osią *y*)

Schnittwinkel *der* **-** kąt przecięcia

Schnittwinkel zweier Geraden - kąt, pod jakim przecinają się dwie proste

Schreibweise *die* - sposób zapisu, pisania

in der aufzählenden Schreibweise - wyliczając

Schwerlinie *die*; –; *-n* - środkowa w trójkącie
Schwerpunkt *der*; -(*e*)*s*; *-e* - środek ciężkości (punkt przecięcia środkowych trójkąta)
Sechseck *das*; *-s*, *-e* - sześciokąt

regelmäßiges Sechseck - sześciokąt foremny

Sehne *die*; –; *-n* - cięciwa
Seite *die*; –; *-n* - bok

Seitendiagonale *die*; –; *-n* **-** przekątna ściany bocznej w bryle
Seitenfläche *die; –, -n* **-** powierzchnia ściany (w bryle)
Seitenhalbierende *die*; *-n*; *-n* **-** środkowa w trójkącie
Seitenhöhe *die*; –; *-n* - wysokość ściany bocznej
Seitenkante *die; –,* -n - krawędź boczna bryły

senkrecht - prostopadły
Senkrechte *die*; –; *-en* - prosta prostopadła
Sinus *der*; –; - sinus
Spiegelung *die*; –; *-en* - odbicie

Punktspiegelung - odbicie względem punktu, symetria środkowa
Spiegelgerade - prosta względem, której następuje przekształcenie odbicie
Spiegelung an einer Geraden - odbicie względem prostej, symetria osiowa

Spitze *die; -, -n* **-** wierzchołek
Statistik *die; -, -en* **-**statystyka

beschreibende Statistik - statystyka opisowa

Steigung *die*; –; *-en* - współczynnik kierunkowy
Steigungswinkel *der*; *-s*; - kąt nachylenia prostej do osi *x*

Stichprobe *die;-, -n* **-** próba statystyczna
Stichprobenumfang *der; -(e)s, Umfänge* **-** liczebność próby
Strecke *die*; –; *-n* - odcinek
  Endpunkt einer Strecke - koniec odcinka
  Länge einer Strecke - długość odcinka
streuen; streute, *hat* gestreut – wałęsać się
subtrahieren; subtrahierte, *hat* subtrahiert - odejmować
Summand *der*; *-en*; *-en* - składnik sumy
summarisch – sumaryczny
Summe *die*; –; *-n* - suma
Symmetrie *die*; –, *-n* - symetria
  Achsensymmetrie *die*; –, *-n* - symetria osiowa
  Punktsymmetrie *die*; –, *-n* - symetria środkowa
  Symmetrieachse *die*; –, *-n* - oś symetrii
  Symmetriezentrum *das*; *-s*, *Symmetriezentren* - środek symetrii
symmetrisch - symetryczny
  achsensymmetrisch - symetryczny względem osi
  achsensymmetrisch zu den beiden Winkelhalbierenden - osiowo symetryczny względem obu dwusiecznych (układu współrzędnych)
  punktsymmetrisch - środkowo symetryczny
  punktsymmetrisch zum Nullpunkt - symetryczny względem początku układu współrzędnych
  punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten - symetryczny względem punktu przecięcia asymptot
  symmetrisch zur Geraden - symetryczny względem prostej

T

Tangens *der*; –; – - tangens
Tangente *die*; –, *-n* - styczna
  Tangente an den Kreis - styczna do okręgu
  Tangente an die Parabel - styczna do paraboli
teilbar - podzielny
Teiler *der*; *-s*; – - dzielnik
Term *der*; *-s*; *-e* - wyrażenie
Trapez *das*; *-es*; *-e* - trapez
Trigonometrie *die; –; nur Sg* - trygonometria
Trinom *das*; *-s*, *-e* - trójmian
  quadratisches Trinom - trójmian kwadratowy

U

Umfang *der*; *-s*; *Umfänge* – obwód
Umfangswinkel, **Peripheriewinkel -** kąt wpisany
Umkreis *der*; *-es*; *nur Sg* - okrąg opisany na figurze
Umkreismittelpunkt *der*; *-(e)s*; *-e* - środek okręgu opisanego na figurze
Umkreisradius *der*; –; *-radien* - promień okręgu opisanego na figurze
umwandeln; wandelte um, *hat* umgewandelt - przekształcać
  etwas in etwas (*Akk*) **umwandeln -** coś w coś przekształcać
  etwas zu etwas umwandeln - coś na coś przekształcać
Umwandlung *die*; –, *-en* - przekształcenie, przeobrażenie
  Umwandlung in etwas (*Akk*) - przekształcenie w coś

ungefähr - około
Ungleichung *die*; –; *-en* - nierówność
Urliste *die;-, -n* – dane statystyczne surowe
Ursprung *der* - początek układu współrzędnych
Ursprungsgerade *die* **-** prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych

V

Variable *die*; *-n*; *-n* - zmienna
Varianz *die;* – wariancja
Vektor *der*; *-s, Vektoren* - wektor
    Betrag des Vektors - długość (moduł) wektora
verdoppeln; verdoppelte*, hat* verdoppelt - podwajać, podwoić
Verteilung *die; -;-en* – podział
    Häufigkeitsverteilung – szereg rozdzielczy
Verhältnis *das*; *-ses*, *-se* - stosunek, proporcja
    das Verhältnis von etwas zu etwas - stosunek czegoś do czegoś
    das Verhältnis zwischen etwas (*Dat*) **und etwas** (*Dat*) - stosunek między czymś a czymś
vermehren; vermehrte, *hat* vermehrt - pomnażać, powiększać
    vermehren um - powiększać o
Vermehrung *die*; *nur Sg* - pomnażanie, powiększanie
vermindern; verminderte, *hat* vermindert - zmniejszyć
    vermindern um - zmniejszyć o
Verminderung *die*; *nur Sg* - zmniejszenie, obniżenie
Verschiebung *die*; –, *-en* - przesuniecie
    Verschiebung mit dem Vektor - przesuniecie o wektor
verschieben; verschob*, hat* verschoben - przesuwać
Vieleck *das*; *-s*, *-e* - wielokąt
    regelmäßiges Vieleck - wielokąt foremny
Vielfache *das*; *-n*, *-n* - wielokrotność
    das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) - najmniejsza wspólna wielokrotność
Viereck *das*; *-s*, *-e* - czworokąt
    konkave Viereck - czworokąt wklęsły
    konvexe Viereck - czworokąt wypukły
    regelmäßiges Viereck - czworokąt foremny, kwadrat
Volumen *das*; *-s*, – / *Volumina* - objętość
Vorgänger *der*; *-s*, – - poprzednik, w ciągu wyraz poprzedni
Vorzeichen *das*; *-s*, – - znak przed liczbą (plus albo minus)
    mit wechselnden Vorzeichen - z przemieniającymi się znakami (raz plus raz minus)

W

Wachstumfaktor *der; -s, ...oren* - współczynnik wzrostu
Walze *die*; *-, -n* - walec ale jako kształt a nie nazwa bryły
    Straßenwalze - walec drogowy
Wendeparabel *die*; –, *-n* - krzywa o równaniu $y = x^3$; $y = x^5$; $y = x^{2n+1}$

Wertemenge *die*; −, -*n* - zbiór wartości

  Wertemenge einer Funktion - zbiór wartości funkcji

Winkelhalbierende *die*; -*n*, -*n* - dwusieczna kąta

  1. Winkelhalbierende - dwusieczna I i III ćwiartki układu współrzędnych, prosta o równaniu $y = x$

  2. Winkelhalbierende - dwusieczna II i IV ćwiartki układu współrzędnych prosta o równaniu $y = -x$

Winkelmaß *das* - miara kąta

  Bogenmaß *das* - miara łukowa kąta (w radianach)

  Gradmaß *das* - miara kąta w stopniach

Wurzel *die*; −, -*n* - pierwiastek

  Kubikwurzel - pierwiastek sześcienny

  ***n*-te Wurzel -** pierwiastek *n*-tego stopnia

  Quadratwurzel - pierwiastek kwadratowy

  Wurzel aus - pierwiastek z

  Wurzelexponent - stopień pierwiastka

waagerecht - poziomo

Wert *der*; -(*e*)*s*; -*e* - wartość

  größter Wert - wartość największa

  kleinster Wert - wartość najmniejsza

  negativer Wert - wartość ujemna

  Polynomwert - wartość wielomianu

  positiver Wert - wartość dodatnia

Wertebereich *der*; -(*e*)*s*; -*e*- zbiór wartości

Wertemenge *die*; –; -*n* - zbiór wartości

Wertetabelle *die*; –; -*n* - tabela wartości funkcji

Winkel *der*; -*s*; – - kąt

  gestreckter Winkel - kąt półpełny

  Mittelpunktwinkel, Zentriwinkel - kąt środkowy

  rechter Winkel - kąt prosty

  spitzer Winkel - kąt ostry

  stumpfer Winkel - kąt rozwarty

  überstumpfer Winkel - kąt wklęsły

  Umfangswinkel, Peripheriewinkel - kąt wpisany

X, Y

***x*-Achse** *die; –; -n* - oś x

***y*-Achse** *die; –; -n* - oś y

Z

Zahl *die*; –, -*en* - liczba

  einstellige Zahl - liczba jednocyfrowa

  ganze Zahl - liczba całkowita

  gerade Zahl - liczba parzysta

  irrationale Zahl - liczba niewymierna

  Kubikzahl - liczba sześcienna, będąca szescianem liczby naturalnej

  natürliche Zahl - liczba naturalna

  negative Zahl - liczba ujemna

  positive Zahl - liczba dodatnia

Primzahl - liczba pierwsza
Quadratzahl - liczba kwadratowa, będąca kwadratem liczby naturalnej
rationale Zahl - liczba wymierna
reelle Zahl - liczba rzeczywista
ungerade Zahl - liczba nieparzysta
zusammengesetzte Zahl - liczba złożona
zweistellige Zahl - liczba dwucyfrowa

Zahlenfolge *die*; -, *-n* - ciąg liczbowy
Zahlengerade *die*; −, *-n* - oś liczbowa
Zentriwinkel *der*; *-s*; - - kąt środkowy
Zentrum *das*; *-s, Zentren* - środek
Symmetriezentrum - środek symetrii
zerlegen, zerlegte, *hat* zerlegt - rozkładać
zerlegen in *Akk* **-** rozkładać na
Zerlegung *die*; –, *-en* - rozkład
Primfaktorzerlegung - rozkład na czynniki pierwsze
Linearfaktorzerlegung - rozkład na czynniki liniowe
Ziffer *die*; −, *-n* – cyfra
Einerziffer - cyfra jedności
Hunderterziffer - cyfra setek
Zehnerziffer - cyfra dziesiątek
Zinsen *Pl* - odsetki
Zinsatz - stopa procentowa
Zinsen nach Ablauf eines Jahres - odsetki po upływie roku
Zinsfaktor - czynnik procentowy
Zinseszins *der*; *-es*, *-en meist Pl* - procent składany (odsetki od odsetek od kapitału)
Zinssatz *der* - stopa procentowa
zunehmen, nahm zu, *hat* zugenommen - wzrastać
Zuordnung *die*; –; *-en* - przyporządkowanie
Zweig *der*; -(*e*)*s*, *-e* - gałąź
Zweige der Hyperbel - gałęzie hiperboli
Zylinder *der; -s,* - walec (nazwa bryły), cylinder (nakrycie głowy)