

$$+b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

W MATEMATYCZNYM
CENTRUM ODKRYĆ

TOMASZ
WÓJTOWICZ

**Program nauczania
matematyki na poziomie rozszerzonym
dla liceum/technikum**

opracowany w ramach projektu

**„Tworzenie programów nauczania oraz scenariuszy lekcji i zajęć wchodzących
w skład zestawów narzędzi edukacyjnych wspierających proces kształcenia ogólnego
w zakresie kompetencji kluczowych uczniów niezbędnych do poruszania się na rynku pracy”**

dofinansowanego ze środków Funduszy Europejskich w ramach
Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój, 2.10 Wysoka jakość systemu oświaty

WARSZAWA 2019

Redakcja merytoryczna – dr inż. Agnieszka Jaworska
Recenzja merytoryczna – Ewa Olszewska
dr Anna Rybak
dr Beata Rola
Agnieszka Ratajczak-Mucharska

Redakcja językowa i korekta – Editio

Projekt graficzny i projekt okładki – Editio

Skład i redakcja techniczna – Editio

Warszawa 2019
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 4.0 Polska (CC-BY-NC).
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pl>

SPIS TREŚCI

I. WSTĘP	5
II. CELE OGÓLNE I SZCZEGÓŁOWE	6
III. TREŚCI KSZTAŁCENIA I ZAŁOŻONE OSIĄGNIĘCIA UCZNIÓW	7
IV. INTERDYSCYPLINARNOŚĆ PROGRAMU NAUCZANIA	16
V. OSIĄGNIĘCIA UCZNIÓW	17
VI. ORGANIZACJA WARUNKÓW I SPOSÓB REALIZACJI KSZTAŁCENIA	18
VII. METODY, FORMY I TECHNIKI PRACY	19
VIII. KOMPETENCJE KLUCZOWE NA LEKCJACH MATEMATYKI I ICH PRZYDATNOŚĆ NA RYNKU PRACY	25
IX. EDUKACJA WŁĄCZAJĄCA	26
X. OCENIANIE OSIĄGNIĘĆ UCZNIÓW	27
XI. EWALUACJA PROGRAMU	29
XII. FUNKCJONALNOŚĆ I PRZYDATNOŚĆ PROGRAMU	31
BIBLIOGRAFIA	32

I. WSTĘP

Program nauczania matematyki dla liceum ogólnokształcącego/technikum na poziomie rozszerzonym zawiera zarówno treści rozszerzone, jak i elementy zakresu podstawowego z matematyki. W programie zakłada się, że do sprawnego funkcjonowania w obecnym świecie najbardziej potrzebne jest rozumienie tego świata, a nie wiedza encyklopedyczna. Za główny cel stawiamy zmianę postawy wobec najważniejszych zadań szkoły – nauczanie i uczenie się staje się procesem przedstawiania uczniom spójnego obrazu świata i przekazywania wiedzy w taki sposób, aby była zrozumiała dla uczniów i integrowała ich z codziennym życiem. To **holistyczne** (Żłobicki, 2009) podejście do nauczania zapewni uczniom efektywną edukację oraz współdziałanie zachodzących procesów edukacyjnych. Uczniowie będą postrzegani jako aktywni uczestnicy procesu uczenia się, poza wiedzą nabędą również umiejętność rozumienia stawianych im wyzwań. Zadaniem nauczyciela będzie wszechstronna opieka nad rozwojem sfery osobowości ucznia. Rozwój intelektualny ucznia po zrealizowaniu tego programu będzie pełny i wszechstronny, oparty na wiedzy interdyscyplinarnej. Edukację holistyczną na matematyce będziemy traktować jako:

- budowanie wzajemnych relacji między uczniami,
- wykorzystanie potencjału uczniów,
- uczenie się, któremu sprzyjają różne sytuacje życiowe,
- proces aktywizujący, pobudzający i wspierający do działania,
- łączenie perspektyw lokalnych i globalnych – interdyscyplinarność.

Efektywna edukacja uczniów na matematyce na poziomie rozszerzonym oznacza **konstruktywistyczne** wykorzystanie zabiegów edukacyjnych. Kształcenie i wychowanie są powiązane z pobudzaniem wszystkich zmysłów i wspieraniem poprzez doświadczanie, odkrywanie i dyskutowanie w procesie uczenia. Takie podejście stawia na aktywność ucznia, pozwala mu na samodzielne konstruowanie wiedzy oraz świadomość tego, czego się uczy, a nauczyciela motywuje do zorganizowania właściwego środowiska uczniowi. Program nauczania obejmuje również narzędzia pomiaru dydaktycznego umożliwiające zbadanie poziomu osiągniętych kompetencji kluczowych.

II. CELE OGÓLNE I SZCZEGÓŁOWE

Cele ogólne

W podstawie programowej kształcenia ogólnego dla 4-letniego liceum i 5-letniego technikum realizacja celów kształcenia jest ściśle powiązana z celami kształcenia/ wymaganiami ogólnymi na matematyce takimi jak:

1. Sprawność rachunkowa (stosowanie działań matematycznych oraz ich wykorzystanie do rozwiązywania problemów w kontekstach teoretycznych i praktycznych).
2. Wykorzystanie i tworzenie informacji (używanie języka matematycznego oraz interpretowanie i operowanie informacjami).
3. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (stosowanie obiektów matematycznych, dobieranie i tworzenie modeli matematycznych, tworzenie obiektów pomocniczych).
4. Rozumowanie i argumentacja (przeprowadzanie rozumowań, stosowanie strategii, dobieranie argumentów).

Cele szczegółowe (kształcenia i wychowania). Uczeń:

- rozwija zdolność do kreatywnego i twórczego rozwiązywania problemów,
- właściwie analizuje, porządkuje i wykorzystuje informacje,
- uczy się poprzez doświadczenia i odkrywanie zależności,
- wdraża oryginalne i nietypowe rozwiązania,
- wytrwale dąży do celu i przewiduje konsekwencje dokonanych wyborów,
- krytycznie ocenia informacje z mediów i Internetu,
- rozumie siebie w otaczającym świecie,
- wyrabia własny obraz świata i przygotowuje się do dorosłego życia,
- stosuje elementy rozumowania matematycznego, takie jak: założenie, teza, dowód,
- tworzy samodzielnie modele matematyczne opisujące zjawiska życia codziennego,
- dobiera trafne argumenty i konstruuje poprawne rozwiązania,
- kształtuje umiejętność weryfikowania hipotez matematycznych,
- samodzielnie zdobywa wiedzę poprzez udział w kołach zainteresowań oraz w kontakcie z uczelniami wyższymi,
- sprawnie posługuje się technologiami informacyjno-komunikacyjnymi,
- uczy się w oparciu o rozpoznanie własnych potrzeb i możliwości,
- jest dociekliwy i poszerza swoje zainteresowania,
- jest zaangażowany w badania, eksperymenty i doświadczenia.

III. TREŚCI KSZTAŁCENIA I ZAŁOŻONE OSIĄGNIĘCIA UCZNIÓW

Zaproponowany podział treści nauczania jest dostosowany do potencjalnych możliwości absolwenta szkoły podstawowej, który będzie realizował matematykę w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

W przypadku poziomu podstawowego i rozszerzonego przewiduje się 640 godzin w całym cyklu kształcenia z podziałem na klasy I–IV liceum ogólnokształcącego lub I–V technikum. Treści kształcenia z poziomu rozszerzonego mogą być realizowane już od klasy I, w zależności od ramowego planu nauczania ustalonego przez szkołę.

Klasa I (liceum – 128 godzin, technikum – 64 godziny – tylko zakres podstawowy)

1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 2) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 3) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 4) stosuje własności monotoniczności potęgowania;
- 5) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 6) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności;
- 7) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- 8) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi;
- 9) stosuje wzór na zmianę podstawy logarytmu.

Przewidywana liczba godzin: 30

2. Wyrażenia algebraiczne (wzory skróconego mnożenia drugiego, trzeciego i n-tego stopnia). Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Przewidywana liczba godzin: 16

3. Równania i nierówności. Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;

- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów;
- 6) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Przewidywana liczba godzin: 18

4. Funkcje (liniowa, kwadratowa). Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej danym wzorem;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych i fizycznych;
- 12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x) + b$.

Przewidywana liczba godzin: 23

5. Funkcje (wykładnicze i logarytmiczne). Uczeń:

- 1) posługuje się funkcjami: wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Przewidywana liczba godzin: 10

6. Układy równań. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- 3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe;
- 4) rozwiązuje układy równań kwadratowych.

Przewidywana liczba godzin: 16

Godziny do dyspozycji nauczyciela: 15

Klasa II (liceum – 192 godziny, technikum – 128 godzin)

1. Funkcja kwadratowa (zagadnienia optymalizacyjne, wzory Viète'a). Uczeń:

- 1) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową;
- 2) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych.

Przewidywana liczba godzin: 10

2. Wyrażenia algebraiczne (wielomiany, wyrażenia wymierne). Uczeń:

- 1) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów;
- 2) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 3) dzieli wielomian jednej zmiennej przez dwumian postaci $x - a$;
- 4) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
- 5) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne;
- 6) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 7) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona).

Przewidywana liczba godzin: 26

3. Równania i nierówności. Uczeń:

- 1) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 2) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić

- do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 3) rozwiązuje równania wymierne;
 - 4) rozwiązuje nierówności wielomianowe dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
 - 5) rozwiązuje nierówności wymierne;
 - 6) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną;
 - 7) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Przewidywana liczba godzin: 30

4. Trygonometria (poziom podstawowy i rozszerzony). Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- 3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- 4) korzysta z wzorów na jedynekę trygonometryczną i tangens;
- 5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta;
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty);
- 7) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
- 8) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
- 9) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- 10) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
- 11) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
- 12) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

Przewidywana liczba godzin: 32

5. Planimetria. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów oraz długości cięciw okręgów i odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie

cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

- 3) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 4) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 5) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 6) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum i środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 7) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Przewidywana liczba godzin: 26

6. Funkcje (różne własności i przekształcenia wykresów funkcji). Uczeń:

- 1) posługuje się funkcją $f(x) = a/x$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 2) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- 3) posługuje się złożeniami funkcji;
- 4) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem.

Przewidywana liczba godzin: 14

7. Rachunek różniczkowy. Uczeń:

- 1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
- 2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
- 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
- 4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
- 5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
- 6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Przewidywana liczba godzin: 26

Godziny do dyspozycji nauczyciela: 28

Klasa III (liceum – 160 godzin, technikum – 160 godzin)

1. Ciągi (w tym granice ciągów oraz szeregi geometryczne). Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie;
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;

- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym lub geometrycznym;
- 5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym;
- 8) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
- 9) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Przewidywana liczba godzin: 30

2. Planimetria (w tym własności czworokątów wpisanych i opisanych na okręgu). Uczeń:

- 1) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 2) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezach;
- 3) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 4) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 5) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Przewidywana liczba godzin: 18

3. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach;
- 3) oblicza odległość między dwoma punktami w układzie współrzędnych;
- 4) posługuje się równaniem okręgu;
- 5) oblicza odległość punktu od prostej;
- 6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- 7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych oraz w symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych);
- 8) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
- 9) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;
- 10) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Przewidywana liczba godzin: 34

4. Kombinatoryka. Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności;
- 3) oblicza liczbę możliwych sytuacji spełniających określone kryteria z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
- 4) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Przewidywana liczba godzin: 22

5. Statystyka. Uczeń:

- 1) stosuje skalę centylową;
- 2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
- 3) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- 4) oblicza wartość oczekiwaną np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Przewidywana liczba godzin: 14

Godziny do dyspozycji nauczyciela: 32

Klasa IV (liceum – 160 godzin, technikum – 160 godzin)

1. Stereometria (poziom podstawowy i rozszerzony). Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastostupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) określa, jaką figurą jest przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastostupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych;

- 8) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
- 9) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Przewidywana liczba godzin: 26

2. Rachunek prawdopodobieństwa. Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
- 3) stosuje schemat Bernoulliego.

Przewidywana liczba godzin: 22

3. Dowody algebraiczne i geometryczne. Uczeń:

- 1) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia;
- 2) przeprowadza dowody geometryczne.

Przewidywana liczba godzin: 26

4. Powtórzenie do egzaminu maturalnego w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

Przewidywana liczba godzin: 50

Godziny do dyspozycji nauczyciela: 26

Klasa V (technikum – 128 godzin): dokonujemy przesunięć z klasy programowo niższej z liceum.

Realizacja treści na matematyce według takiego podziału pozwoli na spełnienie celu nadrzędnego: rozwój u ucznia kompetencji kluczowych niezbędnych do funkcjonowania w przyszłości, a także na właściwe przygotowanie do egzaminu maturalnego w zakresie podstawowym i rozszerzonym, przy uwzględnieniu wieku i zainteresowań uczniów. Istotnym elementem jest poszerzanie treści występujących w podstawie programowej, ale również realizacja treści wykraczających poza podstawę programową kształcenia ogólnego z matematyki. Proponuje się realizację niżej wymienionych treści ponadprogramowych. Uczeń:

- stosuje cechy podzielności liczb, silnie, reszty z dzielenia kwadratów i sześciątów liczb naturalnych w zadaniach konkursowych,
- wykorzystuje w zadaniach olimpijskich jednoznaczność rozkładu liczby na czynniki pierwsze,
- stosuje dwumian Newtona w ciekawych zagadnieniach kombinatorycznych,
- udowadnia różne twierdzenia algebraiczne i geometryczne,
- poznaje własności macierzy i ich zastosowanie,
- stosuje ciekawe przekształcenia funkcji, w tym izometrie,

- stosuje w obliczeniach liczby zespolone,
- stosuje równania parametryczne prostych,
- wykorzystuje elementy logiki matematycznej, w tym prawa rachunku kwantyfikatorów,
- poznaje relacje na zbiorach,
- rozwiązuje zadania z historii matematyki,
- poznaje problemy geometryczne, np. kwadraturę koła, trysekcję kąta.

Głównym celem wprowadzenia zaproponowanych treści ponadprogramowych jest podnoszenie umiejętności matematycznych uczniów oraz podejmowanie twórczych działań przez stosowanie nowoczesnych metod nauczania. W niektórych zagadnieniach warto posłużyć się programami edukacyjnymi wspomagającymi proces logicznego myślenia.

Realizacja wymienionych treści przyczyni się do wzrostu zainteresowania naukami ścisłymi u uczniów, a także do rozwoju umiejętności dostrzegania prawidłowości w różnych dziedzinach nauki. Treści te można realizować również pod kątem przygotowania uczniów do konkursów i olimpiad matematycznych.

Z pewnością realizacja programu nauczania poszerzonego o elementy ponadprogramowe wpływa na wzbogacenie oferty edukacyjnej szkoły i podniesienie jakości jej pracy. Uczeń realizujący treści ponadprogramowe:

- poszerzy swoją wiedzę w zakresie matematyki,
- rozwinie zainteresowania matematyczne,
- rozwinie umiejętności samodzielnego uczenia się,
- będzie aktywnie uczestniczył w konkursach matematycznych.

IV. INTERDYSCYPLINARNOŚĆ PROGRAMU NAUCZANIA

Realizując program nauczania matematyki „W matematycznym centrum odkryć”, uczniowie mogą rozwijać zainteresowania nauką i techniką w wyniku zrozumienia zagadnień związanych z realizacją eksperymentów powiązanych z różnymi dziedzinami nauki. Program zakłada realizację treści wynikających z podstawy programowej w połączeniu z treściami z innych przedmiotów nauczanych w liceum/technikum.

Przykład: treści realizowane na matematyce z podstawy programowej z fizyki:

Uczeń: „rozdziela wielkości wektorowe i skalarnie, wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe)” lub

Uczeń: „wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach”.

Kształcenie kompetencji kluczowych przypisanych do fizyki: kompetencje w zakresie tworzenia i rozumienia informacji, kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, kompetencje cyfrowe.

Kształcenie kompetencji przypisanych innym przedmiotom: kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Program pozwala na rozwijanie **umiejętności uniwersalnych uczniów**, do których będziemy zaliczać:

- traktowanie systematycznej, uporządkowanej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności,
- stosowanie umiejętności myślowo-językowych,
- rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia i integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin,
- formułowanie samodzielnych i przemyślanych sądów,
- łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia,
- pracę w zespołach zadaniowych,
- rozwijanie narzędzi myślowych umożliwiających uczniom obcowanie z kulturą i jej rozumienie,
- wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości i umiejętności,
- uczenie się, któremu sprzyjają różne sytuacje życiowe.

V. OSIĄGNIĘCIA UCZNIÓW

Systematyczne prowadzenie kształcenia matematycznego uczniów jest ważnym elementem samorozwoju ucznia. Osiągnięcia ucznia po zakończeniu realizacji tego programu obejmują wszystkie obszary aktywności matematycznej, zaczynając od typowych umiejętności matematycznych, aż po samodzielne odkrywanie i zdobywanie doświadczeń. Proponuje się pięć standardów, które uczeń opanuje w trakcie nauki matematyki w zakresie rozszerzonym.

- **Stosowanie typowych czynności matematycznych** (sprawność rachunkowa, używanie języka matematyki, stosowanie praw działań matematycznych).
- **Prowadzenie logicznego rozumowania** (matematyzacja czynności w zadaniu, zauważanie związków i prawidłowości, przetwarzanie informacji).
- **Samodzielne rozwiązywanie problemów** (tworzenie i realizacja schematu rozwiązania problemu, interpretacja uzyskanych wyników, stawianie i weryfikacja hipotez).
- **Twórczość i kreatywność w rozwiązywaniu problemów** (tworzenie nowych struktur matematycznych, formułowanie problemów, łączenie matematyki z innymi dziedzinami wiedzy – interdyscyplinarność).
- **Odkrywanie nowych operacji myślowych** (stosowanie nowatorskiego podejścia w rozwiązywaniu zadań).

VI. ORGANIZACJA WARUNKÓW I SPOSÓB REALIZACJI KSZTAŁCENIA

Ważnym czynnikiem mającym wpływ na jakość prowadzonych zajęć jest właściwa ich organizacja, a zatem umiejętność optymalnego wykorzystania miejsca przeznaczonego na lekcje. Wyposażenie pracowni matematycznej możemy podzielić na 3 grupy:

- wyposażenie w tradycyjne pomoce i środki poglądowe w nauczaniu matematyki (tablica z nakładką magnetyczną z naniesionym układem współrzędnych i siecią kwadratową, kalkulatory proste i graficzne, plansze, tablice, wykresy, modele brył, przybory tablicowe, podręczna biblioteczka z literaturą matematyczną),
- wyposażenie medialne (projektor multimedialny, tablica, wizualizer cyfrowy, ekran, lokalna sieć komputerowa, komputer),
- wyposażenie dodatkowe (tablica kopiująca, tablety, system do przeprowadzania testów).

Organizacja kształcenia istotna jest nie tylko ze względu na wyposażenie pracowni matematycznej, ale również pod kątem właściwego rozplanowania jednostki lekcyjnej, z uwzględnieniem czasu trwania poszczególnych czynności. Proponuje się przeprowadzenie lekcji według planu:

1. Sprecyzowanie celów i postawienie problemu – 5 minut.
2. Analizowanie i porządkowanie zdobytych doświadczeń – 5 minut.
3. Twórcze wykorzystanie wiedzy – 20 minut.
4. Prezentacja pracy – 10 minut.
5. Samoocena i refleksja uczniów – 5 minut.

Tak zaproponowana organizacja czasu pracy na lekcji wyzwala u uczniów chęć do zdobywania oraz poszerzania wiedzy i umiejętności. Istotnym elementem jest przygotowanie i postawa nauczyciela, który w trakcie całego procesu lekcyjnego ma możliwość reagowania na potrzeby uczniów. Ważną rolę odgrywają odpowiednio dobrane pomoce dydaktyczne oraz liczebność grup. Należy przy tym pamiętać o indywidualnych predyspozycjach ucznia i czasie, którego potrzebuje on do opanowania materiału. Nie bez znaczenia są także wytrwałość ucznia, zasób jego wiedzy i umiejętność koncentracji na zadaniu. Nauczyciel może tworzyć odpowiednie środowisko sprzyjające uczeniu się, a tym samym lepszemu wykorzystaniu czasu na działania merytoryczne. Tworząc środowisko dydaktyczne, należy także zadbać o właściwe zagospodarowanie przestrzeni, aby ułatwić uczniom ich działania.

VII. METODY, FORMY I TECHNIKI PRACY

O stronie organizacyjnej pracy dydaktycznej decydują właściwie dobrane **formy pracy**. Ich zadaniem jest wskazywanie, jak organizować pracę stosownie do tego, jakie będą cele i zadania kształcenia, czas pracy czy liczba uczniów. Ze względu na liczbę uczniów biorących udział w procesie dydaktycznym proponuje się wdrożyć:

- nauczanie jednostkowe (jednolite i zróżnicowane),
- nauczanie grupowe (jednolite i zróżnicowane),
- nauczanie zbiorowe (praca wspólnym frontem).

Zaangażowanie i aktywność ucznia są kluczowymi założeniami w planowaniu i realizacji jednostki lekcyjnej. Przy doborze technik i metod nauczania nauczyciel musi kierować się tym, aby uczniowie wykazywali się operatywnością i inicjatywą. Rola nauczyciela polega na rozpoznawaniu potrzeb uczniów i zorganizowaniu pracy tak, aby uczniowie mogli zaspokoić swoje potrzeby i się rozwijać. Metody nauczania powinny być dostosowane do preferencji sensorycznych uczniów (po dokonaniu diagnozy wstępnej). Przy dokonywaniu wyboru metody nauczyciel bierze pod uwagę nowoczesne technologie informacyjne oraz wykorzystuje w znaczącym stopniu bazę dydaktyczną szkoły. Zaleca się, aby stosować nowoczesne techniki nauczania, które bardzo mocno podkreślają podmiotowość ucznia, a także funkcję i rolę nauczyciela. Zgodnie ze współczesną dydaktyką w szkole stosuje się metody aktywne, ponieważ działania praktyczne i przekazywanie wiedzy innym przyczyniają się do zwiększenia efektywności pracy i kreatywności ucznia.

1. Zindywidualizowany proces edukacji

Proponuje się, aby uczeń został odpowiednio nakierowany na wiedzę, umiejętności i postawy przez udział w tzw. **tutoringu**. Do jego celów zaliczamy:

- opracowanie perspektywy ścieżki kariery życiowej (jako element preorientacji zawodowej),
- budowanie właściwego systemu wartości,
- podejmowanie decyzji i branie za nie odpowiedzialności,
- przejmowanie odpowiedzialności za własną naukę.

Nauczyciel matematyki biorący odpowiedzialność za ścieżkę indywidualnego rozwoju ucznia może realizować plan tutoringu według punktów:

1. Poznanie ucznia (*jego talenty, słabe i mocne strony – styl pracy, wartości, plany życiowe*).

2. Zaplanowanie celów i związanych z nimi działań np. w formie kontraktu.
3. Realizacja i bieżący monitoring przyjętego planu współpracy.
4. Podsumowanie efektów współpracy (*ewaluacja*).

W szkole dla uczniów, w tym dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, można opracować ogólne zasady działania tutoringów, które będą precyzowały liczbę uczniów objętych tutoringiem, formy spotkań, zasady realizacji wspólnych działań.

2. Metoda stolikowa JIGSAW

Jest wykorzystywana, gdy uczniowie mają przyswoić pewną partię materiału, którą można podzielić na kilka spójnych fragmentów. Zadaniem ucznia jest opanowanie małego fragmentu wiedzy i przekazanie go innym osobom. Metoda ta pozwala na połączenie cząstkowej wiedzy w całość i kształcenie poczucia odpowiedzialności za wiedzę swoją i innych oraz umożliwia doskonalenie umiejętności planowania i organizowania własnego procesu uczenia się.

Zasady pracy metodą **JIGSAW** (dokonujemy dwa razy podziału na grupy):

- 1) Pierwszy podział na grupy – 4–6-osobowe **grupy eksperckie** otrzymują od nauczyciela po różnym fragmencie materiału dotyczącego danego zagadnienia. Każdy z zespołów ma za zadanie zapoznać się, przedyskutować i rozpracować swoją część wiedzy. Każdy uczeń indywidualnie musi zrozumieć zagadnienie na tyle dobrze, aby wytłumaczyć je później innej grupie uczniów. W tym momencie każdy z uczniów zostaje ekspertem.
- 2) Drugi podział na grupy – tworzą się nowe grupy z ekspertów reprezentujących różne zagadnienia (omówione w grupach w pierwszym podziale). Eksperti wzajemnie relacjonują sobie, czego dowiedzieli się podczas pracy na etapie pierwszym.
- 3) Na zakończenie eksperci wracają do swoich grup pierwotnych, porównują zdobytą wiedzę i sprawdzają, czy wszyscy przyswoili sobie cały materiał.

Po tych trzech etapach następuje sprawdzenie całości wiedzy opanowanej przez uczniów; pytania przygotowuje nauczyciel bądź sami uczniowie.

Zastosowanie opisanej metody pozwala na ograniczenie roli nauczyciela jedynie do kontroli i kierowania pracą uczniów, ocenę stopnia realizacji celów lekcji, zaś dla uczniów – przyswojenie treści, które są wielokrotnie powtarzane podczas lekcji.

3. Nauczanie problemowe

Kształtowanie twórczej postawy ucznia, stwarzanie sytuacji, w których uczeń ma możliwość doświadczania i odkrywania otaczającego go świata, może odbywać się

podczas stosowania **zadań-problemów** na lekcjach matematyki. Wymagają one kreatywności ze strony ucznia i są istotnym elementem zaangażowania w proces nauczania matematyki. Według Zofii Krygowskiej (Krygowska, 1977) zadania-problemy dzieli się na trzy rodzaje:

- ze względu na dane – brak danych, podanie w zadaniach danych zbędnych, danych niewystarczających;
- ze względu na kierunek dedukcji i możliwe wnioski (o co byś zapytał? co mógłbyś obliczyć? co możesz stąd wnosić?);
- ze względu na możliwość stosowania różnych metod badania.

Sytuacje nietypowe pomagają uczniowi odkrywać nowe drogi rozwiązania, radzić sobie w nowych, nie tylko matematycznych sytuacjach i są zachętą do aktywnego uczestnictwa w lekcjach matematyki. Zatem zadaniem nauczyciela jest aktywizowanie uczniów i stwarzanie właściwych warunków do podejmowania przez nich niestandardowych działań. Rozwiązywanie trafnie dobranych problemów wzbudza w uczniach ciekawość i stymuluje ich myślenie. Uczniowie, którzy pracują z zadaniami nietypowymi, wnikliwiej analizują treści zadań i potrafią wykorzystywać właściwy model matematyczny w różnych sytuacjach.

W trakcie rozwiązywania zadań-problemów należy stosować kolejne czynności:

1. Wytwarzanie sytuacji problemowej.
2. Zapoznanie z treścią problemu.
3. Wysuwanie hipotez prowadzących do rozwiązania (poprzez kształtowanie intuicji, pobudzanie uczniów do przewidywania i uzasadniania).
4. Weryfikacja hipotez, wybór drogi rozwiązywania.
5. Rozwiązanie problemu (różnorodnymi metodami, przy użyciu języka matematycznego).
6. Sprawdzenie poprawności wyniku rozwiązania (istotne jest wypracowanie konstruktywnego stosunku ucznia do popełnionych błędów).
7. Przedłużenie rozwiązywania (szukanie innych dróg rozwiązywania, próba rozbudowania problemu, pobudzanie do refleksji i argumentowania, stawianie pytań).

Nauczanie problemowe **stawia ucznia w centrum** procesu uczenia się. Opiera się najczęściej na pracy grupowej i skłania wszystkich członków grupy do refleksji na temat własnych doświadczeń związanych z problemem. Istotę nauczania problemowego stanowi wskazywanie i podpowiadanie sposobów zdobywania wiedzy zamiast standardowego przekazywania informacji poprzez wykład i proste ćwiczenia. Nauczyciel pracujący metodą problemową staje się doradcą, który udziela wskazówek, gdy uczniowie mają problem z rozwiązaniem trudnego zadania lub gdy go nie rozumieją.

Inicjuje metody i objaśnia ich znaczenie dla procesu uczenia się oraz przedstawia cele uczenia się i przygotowuje materiały do pracy.

4. Mapa pojęciowa

Zwana też mapą mentalną, mapą mózgu, mapą myśli – służy do wizualnego opracowania pojęcia z wykorzystaniem rysunków, symboli, wycinków, krótkich słów, zwrotów i haseł, zależności. Pozwala na tworzenie struktury wiedzy, ukazanie związków i zależności między różnymi kategoriami zjawisk i pojęć. Za pomocą tej metody powstaje obraz danego pojęcia, problemu, tematu, co następuje w wyniku intensywnej wymiany myśli i zbierania pomysłów. Nasze myśli są spontaniczne, nie są uporządkowane w logiczne struktury, często wybiegają w przód. Kiedy zapisuje się je za pomocą mapy pamięci, pracuje cały mózg, a więc obie jego półkule. W odróżnieniu od tradycyjnych metod zbieranie informacji w powyższej metodzie odbywa się przez notowanie skojarzeń (nic nie ulega odrzuceniu). Specyficzna jest też forma graficzna. Wizualne i mentalne wyobrażenia wpływają na uczenie się i wyszukiwanie zależności i powiązań między zależnościami.

5. Metoda projektu

Dzięki zastosowaniu tej metody uczniowie rozwijają niezbędne umiejętności, takie jak:

- współpraca w grupie,
- organizowanie własnej pracy,
- planowanie i podejmowanie decyzji,
- prezentowanie własnego punktu widzenia, słuchanie opinii innych, dyskusowanie,
- dokonywanie samooceny,
- przygotowywanie się do wystąpień publicznych,
- gromadzenie i selekcjonowanie informacji,
- rozwiązywanie realnych problemów (badawczych lub dydaktycznych),
- stosowanie wiedzy w praktyce.

Nauczanie metodą projektu zakłada zamianę ról nauczyciela, uczniów oraz osób biorących udział w projekcie. Do poszczególnych etapów występujących w tej metodzie zaliczamy: wybór i sformułowanie tematu, analiza warunków realizacji, planowanie organizacji działań, realizacja projektu, prezentacja produktu końcowego oraz ewaluacja.

6. Studium przypadku (Fortuna, 2010)

Polega na szczegółowej analizie konkretnego przypadku, a następnie wyciągnięciu wniosków i uogólnień. Metoda może być stosowana na lekcjach, gdy uczestnicy posiadają duży zasób wiedzy, natomiast same zajęcia mają również na celu integrację grupy. Jej poszczególne etapy to: identyfikacja problemu, geneza i dynamika zjawiska, znaczenie problemu, prognoza, propozycja rozwiązania, wdrażanie i efekty oddziaływań.

Korzyści płynące ze stosowania tej metody:

- nawiązywanie do własnych doświadczeń, a przez to rozbudzanie zainteresowań daną kwestią,
- stworzenie okazji do wymiany doświadczeń i poglądów między uczestnikami zajęć, a przez to wzbogacanie wiedzy na dany temat,
- ćwiczenie umiejętności takich jak: analizowanie, argumentowanie, dyskusowanie oraz postępowanie krytyczne.

Ze względu na stosowaną procedurę i zakładane cele można wyróżnić trzy typy studium przypadku:

1. Ilustracyjny – celem jest diagnoza konkretnego zdarzenia, ma ono charakter poglądowy, ilustruje konkretną osobę lub zjawisko.
2. Problemowy – celem jest nie tylko rozpoznanie danego zdarzenia, lecz także zawartych w nim problemów do rozwiązania.
3. Otwarty epizod – opisane zdarzenie nie ma zakończenia, a zadanie polega na rozstrzygnięciu przewidywanego rozwoju wypadków.

Najczęściej realizacja zajęć jako analizy przypadku podzielona jest na dwa etapy:

1. Uczestnicy po krótkim wprowadzeniu nauczyciela zapoznają się z materiałem. Można wówczas podzielić ich na grupy i poprosić, aby każda wypracowała wspólne stanowisko w danej kwestii, a następnie zaprezentowała je pozostałym.
2. Otwarta dyskusja na szerszym forum, w przypadku przyjęcia wariantu z podziałem na grupy – prezentacja stanowisk grup. Jednym z możliwych rozwiązań jest przeprowadzenie podsumowania poprzez zadawanie pytań prowokujących do budowania analogii, spojrzenia w szerszej perspektywie.

Stosowanie aktywizujących technik nauczania wykorzystuje maksymalnie potencjał uczniów, ale będzie też wymagało innej roli nauczyciela. Zadaniem nauczyciela jest przygotowanie najbardziej optymalnych warunków do uczenia się uczniów, wspieranie oraz udzielanie informacji zwrotnej. Szkoła w taki sposób organizuje zajęcia, aby uczniowie w sposób twórczy i aktywny doświadczali świata i rozwiązywali problemy, poszukiwali odpowiedzi na postawione pytania, a przy tym odczuwali chęć ciągłego uczestnictwa w procesie uczenia się. Dlatego proponuje się, aby uczeń posiadał

umiejętności praktyczne i zapoznał się z różnymi dziedzinami życia poprzez inne, różnorodne zajęcia i aktywności:

- **Laboratoria badawcze** – innowacyjna forma lekcji, w trakcie której uczeń będzie mógł rozpoznać swoje zainteresowania, poszerzać wiedzę i kształcić kompetencje kluczowe. Lekcja taka może dotyczyć np. kształtowania umiejętności programowania. Takie nietypowe lekcje mogą być prowadzone w różnorodnej formie nie tylko przez nauczyciela, ale również rodzica, specjalistę czy nauczyciela akademickiego w salach dydaktycznych i warsztatowych uczelni wyższej.
- **Podróże odkrywcze** – w ramach pracy laboratoriów mogą odbywać się wyjazdy edukacyjne uczniów np. na zajęcia na wyższej uczelni. Ich nadrzędną wartością jest praktyczna i spostrzeżeniowa konfrontacja z rzeczywistością, co pomoże uczniom w zrozumieniu omawianych treści nauczania i ich przyswojeniu. Celem wyjazdów jest kształcenie u uczniów umiejętności dostrzegania w znanych zjawiskach i obiektach nowych pojęć, a także odkrywania związków między różnymi procesami. Podczas wyjazdów stosowana jest zasada bezpośredniej obserwacji zjawisk i faktów.
- **Sesje naukowe** – proponuje się przeprowadzanie lekcji w formie warsztatów z nauczycielami akademickimi oraz studentami dla uczniów wykazujących szczególne uzdolnienia i predyspozycje z matematyki, z udziałem np. studentów oraz innych nauczycieli. Zajęcia mogą odbywać się w budynku szkoły oraz w salach laboratoryjnych uczelni wyższej. Uczniowie objęci są wsparciem merytorycznym przez pracowników uczelni w przygotowaniu do konkursów i olimpiad matematycznych. Oprócz tego można organizować spotkania seminaryjne z kadrą naukową oraz umożliwiać uczniom korzystanie z systemu biblioteczno-informacyjnego. Dobór uczniów do poszczególnych sesji zależy od stopnia diagnozy umiejętności ucznia przeprowadzonej przez nauczyciela.

Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi mogą również uzyskać wsparcie w formie:

- dostosowania liczby bodźców związanych z procesem nauczania,
- umożliwiania poznania wielozmysłowego,
- częstego odwoływania się do konkretnego,
- różnicowania zadań oraz stopniowania trudności,
- zapewnienia dodatkowych środków dydaktycznych,
- wydłużenia czasu pracy,
- dzielenia partii materiału na mniejsze części.

VIII. KOMPETENCJE KLUCZOWE NA LEKCJACH MATEMATYKI I ICH PRZYDATNOŚĆ NA RYNKU PRACY

Rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki powoduje, że wiedza, postawy i umiejętności służą naukowemu poznawaniu świata i opisywaniu otaczającej nas rzeczywistości. Sprzyja to wykorzystaniu nabytych wiadomości i umiejętności do rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych. Kompetencje muszą mieć odzwierciedlenie w zapisach dotyczących wiedzy, postaw i umiejętności. Wybrane formy i metody pracy służą ćwiczeniu kompetencji kluczowych niezbędnych do poruszania się na rynku pracy. Do ich całościowego opanowania niezbędne są: technologie informacyjno-komunikacyjne – ICT, przedmioty matematyczne i przyrodnicze, języki obce poprzez stosowanie nauczania eksperymentalnego, kształcenie i rozwój umiejętności pracy zespołowej, innowacyjności oraz postaw kreatywności. W ramach kształcenia uczniów kładziony jest duży nacisk na zindywidualizowane podejście do ucznia. W programie nauczania treści przedmiotowe są nierozdzielnie połączone z umiejętnościami kluczowymi i nauczane jednocześnie tak, aby uczniowie koncentrowali się zarówno na treści, jak i na procesie pracy. Do takich umiejętności możemy zaliczyć: zdolność rozumienia pojęć i koncepcji z wielu dziedzin, efektywną pracę w wirtualnym zespole, umiejętność przetwarzania danych, umiejętność pracy w różnych umiejscowieniach kulturowych, rozumowanie oparte na wiedzy, doprowadzanie procesów do oczekiwanych wyników.

IX. EDUKACJA WŁĄCZAJĄCA

Do głównych celów w procesie realizacji założeń edukacji włączającej możemy zaliczyć: uczenie się wzajemnej tolerancji, otwartości i wrażliwości, integrowanie uczniów niepełnosprawnych z pełnosprawnymi, a także integrowanie uczniów innych narodowości, języków i kultur. Każdy uczeń na lekcji matematyki, bez względu na niepełnosprawność, ma prawo do pełnego uczestnictwa w zajęciach i równych szans edukacyjnych. Dla zapewnienia właściwej realizacji zaleceń Ministra Edukacji Narodowej proponuje się:

- objęcie uczniów dodatkowymi zajęciami profilaktyczno-wychowawczymi, które zapewnią niezbędne wsparcie i pomoc,
- zastosowanie mnemotechnik – sposobów na skuteczniejsze uczenie się,
- uczenie kooperatywne, czyli przez współpracę,
- wprowadzenie nowoczesnej metody RSA Biofeedback zwiększającej kreatywność, koncentrację uwagi i odporność na stres,
- organizację dla rodziców warsztatów poruszających tematykę niepełnosprawności i metodyki pracy na lekcjach matematyki,
- wzbogacanie przez nauczyciela matematyki warsztatu pracy z uczniem niepełnosprawnym,
- opracowanie poradnika dla uczniów i ich rodziców nt. edukacji włączającej,
- zapewnienie niezbędnej opieki asystenta dla ucznia wymagającego opieki,
- bieżące monitorowanie efektywności zapewnianej pomocy,
- stworzenie sieci współpracy nauczycieli dla uczniów wymagających wsparcia.

X. OCENIANIE OSIĄGNIĘĆ UCZNIÓW

Ocena osiągnięć uczniów na lekcjach matematyki ma za zadanie:

- mobilizować ucznia do systematycznej pracy,
- przedstawiać bieżące postępy ucznia w pracy,
- informować ucznia o poziomie jego osiągnięć edukacyjnych,
- dostarczać bieżącej informacji o trudnościach w przyswajaniu wiedzy przez uczniów,
- wspierać nauczyciela w organizacji pracy na lekcji.

Dokonując oceny ucznia, sprawdzamy poziom opanowania przez niego wiadomości i umiejętności. Oceny określają znajomość pojęć i zjawisk, definicji i twierdzeń, reguł i zasad oraz ich rozumienie. Dobre ocenianie wymaga sformułowania jasnych kryteriów, znanych i akceptowanych przez uczniów. Kryteria powinny być zgodne z wymaganiami szczegółowymi zapisanymi w podstawie programowej oraz wewnątrzszkolnym systemem oceniania. Poniżej przedstawiono propozycje ustalenia kryteriów na poszczególne stopnie w zależności od opanowania wiadomości i umiejętności.

Opis wymagań na poszczególne oceny:

- niedostateczny – uczeń nie potrafi zdefiniować podstawowych pojęć ani z pomocą nauczyciela wykazać się wiedzą czy rozwiązać zadań o elementarnym stopniu trudności,
- dopuszczający – uczeń opanował wymagania konieczne wsparte na procesach pamięciowych i naśladownictwie działania, ma braki w wiadomościach i umiejętnościach, rozwiązuje zadania o niewielkim stopniu trudności,
- dostateczny – uczeń rozumie wiadomości i podejmowane działania, posiada proste umiejętności,
- dobry – uczeń stosuje wiedzę w sytuacjach typowych oraz jest nastawiony na działanie, opanował treści złożone,
- bardzo dobry – uczeń stosuje wiedzę w sytuacjach typowych i problemowych, ma pełny zakres wiedzy i umiejętności, łączy wiedzę z różnych dziedzin,
- celujący – uczeń wykracza poza ramy przewidziane w programie nauczania, osiąga sukcesy w konkursach i olimpiadach, rozwiązuje nietypowe problemy teoretyczne i praktyczne.

Ocenie podlegają: prace klasowe, kartkówki, matury próbne, projekty, udział w konkursach i olimpiadach, zaangażowanie ucznia, odpowiedzi ustne, prace domowe, prace długoterminowe, przygotowanie do zajęć.

W ocenianiu prac pisemnych stosujemy **ocenianie holistyczne**, w którym spełnienie kolejnych kryteriów oznacza zbliżenie się do rozwiązania problemu. Przyznanie kolejnych punktów informuje o zbliżeniu się do pełnego rozwiązania. Schemat oceniania w podejściu holistycznym powinien być starannie opisany i zawierać przykłady wielu metod rozwiązania ze wskazaniem punktów krytycznych (przykład):

3 punkty – rozwiązanie bezbłędne,

2 punkty – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zostało doprowadzone do końca, ale zawierało błędy rachunkowe i usterki, lub rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone do końca,

1 punkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone do końca, a w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania wystąpiły błędy i usterki,

0 punktów – rozwiązanie, w którym nie było istotnego postępu.

W celu sprawdzenia postępów ucznia i uzyskania przez niego zrozumienia danego zagadnienia można zastosować **metodę OK – oceniania kształtującego**, które składa się z kilku elementów (spełnia funkcję motywującą i wspierającą ucznia):

1. Cel (uczeń wie, jakie umiejętności nabędzie).
2. NaCoBeZU (uczeń wie, co będzie robił i za co będzie oceniany).
3. Informacja zwrotna (nauczyciel uświadamia ucznia, co zrobił dobrze i co musi poprawić).
4. Ocena koleżeńska (uczniowie włączają się w proces oceniania).
5. Samoocena (pozwala nauczycielowi monitorować postępy i modyfikować dalsze nauczanie).

W programie proponuje się zastosowanie tzw. **e-portfolio prezentacyjnego ucznia** jako innowacyjnej metody oceniania postępów ucznia oraz **e-portfolio ocenianego**, którego celem jest prezentacja posiadanych kompetencji zgodnie z wyznaczonymi kryteriami oceny w zakresie określonym przez nauczyciela. Narzędzia te pozwalają kształtować i wzmacniać wewnętrzną motywację do uczenia się i rozwoju. Zawierają w sobie ocenę jakości i efektywności oraz informację zwrotną.

Ocenianie uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi:

- nie można wymagać mniej, niż jest zapisane w podstawie programowej,
- zakres wiedzy i umiejętności powinien dać szansę na sprostanie wymaganiom na wyższym etapie edukacyjnym,
- przy ocenie należy uwzględniać wkład pracy i wysiłek adekwatny do możliwości ucznia,
- ocenianie ma służyć dziecku i korygować jego dotychczasowe postępowanie,
- kryteria oceny muszą być jasno sformułowane.

XI. EWALUACJA PROGRAMU

Zadaniem ewaluacji (Komorowska, 1995) programu nauczania jest ulepszenie jego struktury oraz dodanie lub zmodyfikowanie dobranych technik i metod pracy.

Ewaluacja powinna przebiegać w trzech etapach:

I. Ewaluacja przedempiryczna – dokonywana po opracowaniu programu (weryfikacja założeń przed zastosowaniem w praktyce szkolnej).

II. Ewaluacja kształtująca (bada się przebieg procesu kształcenia na treściach zawartych w programie).

III. Ewaluacja podsumowująca (badanie umiejętności uczniów na podstawie określonych celów i zadań).

Ewaluacji programu nauczania **w zakresie wiedzy i umiejętności** uczniów można dokonać poprzez:

- Test na wstępie (daje podstawy do planowania i właściwego zorganizowania procesu kształcenia).
- Testy śródroczne (dają wskazówki do modyfikacji i dalszej pracy z uczniami).
- Testy końcowe (można je zestawić z testem na wstępie).

Ocena zmian w zakresie kształcenia właściwych **postaw** u uczniów może być dokonana przez poniższe narzędzie – ankietę (w powiązaniu z osiągnięciami uczniów):

Poniższe stwierdzenia uczeń ocenia w skali 1–10.

1. Potrafię przeprowadzać typowe czynności matematyczne.
2. Prowadzę logiczne rozumowania.
3. Samodzielnie rozwiązuję problemy.
4. Twórczo i kreatywnie rozwiązuję problemy.
5. Odkrywam nowe operacje myślowe.

Metody i narzędzia ewaluacji programu dot. oceny kształcenia w zakresie **oceny realizacji celów kształcenia**: ankietę TAK/NIE.

Wpisujemy TAK lub NIE:

1. Program pozwala na pracę z uczniem zdolnym oraz uczniem mającym trudności w nauce.
2. Program rekomenduje określone metody pracy z uczniem.
3. Proponowane metody zapewniają osiągnięcie wskazanych w programie celów.
4. Program promuje różnorodne formy pracy.
5. Program umożliwia indywidualizację pracy.

Ewaluacja uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi

Monitorowanie procesu wymaga systematycznego zbierania danych w celu określenia postępów ucznia w odniesieniu do dalszej edukacji i wspierania ucznia ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Można je przeprowadzić w formie oceny (ankieta, wywiad) poziomu funkcjonowania w kilku różnych obszarach, do których możemy zaliczyć:

- rodzaj (zasoby) udzielonego wsparcia oraz stosowane metody pracy,
- skuteczność podejmowanych działań (w opinii rodzica i ucznia) w zakresie dostosowań treści nauczania i sposobów oceniania,
- zmiany i postępy w nauce oraz w funkcjonowaniu społecznym ucznia,
- weryfikacja wdrożonych działań i ich wpływ na rozwój intelektualny ucznia.

Przeprowadzona ewaluacja oraz okresowa ocena efektywności wdrożonych działań powinny mieć wpływ na dokonanie przez nauczyciela niezbędnych modyfikacji programu.

XII. FUNKCJONALNOŚĆ I PRZYDATNOŚĆ PROGRAMU

Zaproponowany sposób realizacji działań, dostosowany do potrzeb uczniów, z uwzględnieniem proponowanych celów, form i metod pracy, systemu oceniania oraz ewaluacji jest pozbawiony wszelkich barier (finansowych, organizacyjnych, technologicznych), które uniemożliwiałyby adaptację w dowolnej placówce edukacyjnej. Program jest zgodny z nową podstawą programową i może zostać wdrożony do realizacji w liceum/technikum na przedmiocie matematyka na poziomie podstawowym i rozszerzonym.

BIBLIOGRAFIA

- Żłobicki Wiktor, *Edukacja holistyczna w podejściu Gestalt*, Wyd. Impuls, Kraków 2009.
- Fortuna Paweł, *Studium przypadku w praktyce szkoleniowej. Czyli jak uczyć się na doświadczeniach innych*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne Profesjonalne, Gdańsk 2010.
- Krygowska Zofia, *Zarys dydaktyki matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997.
- Kordziński Jarosław, *Nauczyciel, trener, coach*, Wolters Kluwer Polska, Warszawa 2013.
- Walczak Wojciech, *Jak oceniać ucznia*, Galaktyka, Łódź 2001.
- Komorowska Hanna, *Konstrukcja, realizacja i ewaluacja programu nauczania*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 1995.
- Piotrowska Ewa, *Społeczny konstruktywizm a matematyka*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2008.
- Miksza Małgorzata, *Zrozumieć Montessori, czyli Maria Montessori o wychowaniu dziecka*, Wydawnictwo Impuls, 2008.
- Black Paul, Harrison Christine, *Jak oceniać, aby uczyć?*, Wyd. Civitas, Warszawa 2006.

Tomasz Wójtowicz – magister matematyki, nauczyciel mianowany, zatrudniony w Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 1 w Prudniku, z 9-letnim stażem pracy. Egzaminator OKE egzaminu maturalnego oraz egzaminu ósmoklasisty z matematyki. W latach 2016–2017 pełnił funkcję eksperta w Szkole ćwiczeń ORE. Laureat m.in. Nagrody Marszałka Województwa Opolskiego za szczególne osiągnięcia w rozwoju edukacji. Autor publikacji *Umysły w drodze do przyszłości, część II* (2015), ścieżek edukacyjnych *Ptasi świat i jego tajemnice* (2013), *Okolica, jakiej nie znamy* (2013), współautor publikacji *Nowoczesna Edukacja Szkolna – jak to się robi w praktyce* (2014).